

(Indication : Si X_i désigne le $i^{\text{ème}}$ nombre obtenu par Samuel, il s'agit de calculer $\Pr(\prod_{i=1}^{100} X_i > 4^{100})$.

Transformer le produit en somme et utiliser le T.C.L. appliqué aux variables $\ln(X_i)$.

VIII - On cherche à mettre au point un protocole pour dépister une maladie.

Partie A :

On veut d'abord évaluer la proportion p des personnes atteintes par cette maladie. Pour cela, on prélève un échantillon de 1000 personnes dont on analyse le sang. Le test a deux résultats possibles : soit il est positif (la personne est malade), soit il est négatif (la personne n'est pas atteinte).

On appelle N la variable aléatoire égale au nombre de personnes touchées par la maladie sur les 1000 choisies.

1. Quelle est la loi suivie par N (on précisera les hypothèses utilisées) ? Par quelle loi à densité peut-on l'approcher ? A quelles conditions ?
2. On décide de prendre $p = 0.1$. En utilisant l'approximation ci-dessus, déterminer un réel a tel que :

$$\Pr(100 - a \leq N \leq 100 + a) = 0.95$$

(On prendra : $\sqrt{10} \approx 3$)

3. En fait, on a observé, sur l'échantillon prélevé, 110 personnes atteintes de cette maladie. Le choix de $p = 0.1$ vous paraît-il cohérent avec l'observation ?

Dans toute la suite, on prend $p = 0.1$

Partie B

On veut minimiser les coûts de dépistage.

Le coût de chaque analyse étant élevé (120 euros), on cherche à minimiser le nombre de ces examens. On a le choix entre deux stratégies :

- méthode 1 : on analyse le sang de chaque personne : quand n personnes se présentent, on fait donc n analyses.
- méthode 2 : on regroupe les prélèvements sanguins de n personnes et on fait subir une analyse à ce mélange. Si l'analyse est négative, c'est à dire si aucun individu parmi les n n'est atteint, on a donc testé n personnes à l'aide d'une analyse. Si l'analyse est positive, c'est à dire si au moins une personne parmi les n est atteinte, on analyse alors séparément le sang de chaque individu. On aura donc fait dans ce cas $n + 1$ analyses.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'analyses effectuées avec la seconde méthode pour dépister la maladie chez n personnes.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Montrer que son espérance est :

$$E(X) = (n + 1) - n(1 - p)^n$$

3. En déduire que la seconde méthode est plus économique que la première si et seulement si :

$$n(1 - p)^n \geq 1$$

IX - On lance 10 000 fois une pièce de monnaie équilibrée.

1. Trouver un intervalle centré en 5000 tel que le nombre de pile obtenu se trouve dans cet intervalle avec une probabilité supérieure ou égale à 0.99.
2. Comparer ce résultat avec celui obtenu par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.

X - (Session de Mai 2009 - Extrait)

On lance deux dés ordinaires à 6 faces.

1. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu (somme des chiffres obtenus à l'issue du lancer) soit un multiple de 4 ?

2. On lance 36 fois deux dés ordinaires à 6 faces. Notons X_{36} la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'on observe un résultat qui est un multiple de 4 au cours des 36 lancers.
- Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X_{36} ?
 - Calculer son espérance mathématique $E[X_{36}]$ et sa variance $Var[X_{36}]$. (On donne $\sqrt{3} = 1,7$).
 - Montrer que X_{36} peut être approximé par une variable aléatoire continue.
 - En notant X_n le nombre de fois où l'on observe un résultat qui est un multiple de 4 au cours de n lancers, peut-on dire que X_n converge en probabilité vers un nombre certain a , lorsque n augmente indéfiniment ? Justifier votre réponse.
 - On donne $\alpha = \text{prob}\{X_{36} \in [E[X_{36}] - 1; E[X_{36}] + 1]\} = 0,4354$. En utilisant l'approximation précédente, calculer une valeur approchée de α sans effectuer la correction de continuité.
 - Quelle est la marge d'erreur résultant de l'approximation utilisée ?
 - De quel pourcentage cette marge serait-elle réduite si l'on applique lors du calcul de α la correction de continuité ?

XI - (Session de Mai 2005)

Au second tour d'une élection nationale, un des deux candidats, le candidat A, obtient 6 695 000 voix sur les 13 000 000 de suffrages exprimés.

- La veille du vote, un institut de sondage annonçait la victoire du candidat B sur la base d'un échantillon représentatif de 100 personnes. Evaluer la probabilité qu'avait cet institut de se tromper. Toute la démarche permettant de parvenir au résultat sera développée.
- Quelle aurait été cette même probabilité si l'institut avait prélevé un échantillon représentatif de 1600 personnes ?
- Comment peut-on expliquer ce résultat ?

XII - (Session de Mai 2006)

Dans le service pédiatrique d'un dispensaire, des études sérieuses ont montré que la durée d'une consultation de nourrisson est une variable aléatoire qui suit une loi normale, d'espérance 12 minutes pour un écart type de 4 minutes. (Les parties 1 et 2 sont indépendantes).

Partie 1 : On se propose de simuler les durées de 9 consultations consécutives à l'aide d'une table de nombre au hasard.

- Exposer rapidement le principe de la méthode de l'anamorphose permettant de réaliser une telle simulation.
- On fournit l'extrait suivant d'une table de nombres au hasard :

69 15 33 00 11 12 52 39 97 72 09 51 94 52 24 20 57 93

- En considérant des groupes de 4 chiffres dans la liste précédente et en utilisant la méthode présentée à la question 1, réaliser la simulation des durées de 9 consultations successives de ce service.
- En déduire le temps total nécessaire pour traiter consécutivement ces 9 consultations.

Partie 2 : On considère toujours que la durée aléatoire X d'une consultation suit une loi normale d'espérance 12 minutes et d'écart type égal à 4 minutes.

- Calculer α_1 , la probabilité que la consultation de 18 nourrissons traités consécutivement par une même personne puisse être réalisée en trois heures d'une matinée de travail ininterrompu.
- Que peut-on conclure, **sans calcul**, de la probabilité α_2 qu'une personne travaillant 6 heures d'affilée (le double de temps) parvienne à traiter 36 consultations (le double de consultations) ? Justifier votre réponse de façon rigoureuse.
- Si T est le temps de traitement, quel temps minimum, T_m , devrait-on accorder au traitement des 18 consultations si l'on veut que la probabilité que le travail soit achevé au terme de cette durée soit d'au