Soient $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction *continue*, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_j, \ldots)$ une suite de nombres réels vérifiant $0 \leqslant s_j \leqslant 1$ pour tout $j \geqslant 1$. On désigne par $\mu_n(f, s)$ le nombre réel

$$\mu_n(f, s) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(s_j)$$

et par $\mu(f, s)$, lorsqu'elle est définie, la limite

$$\mu(f, s) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(f, s).$$

I

1° Déterminer $\mu(f, s)$ dans les différents cas suivants :

a. La fonction f est constante;

b. La suite s est convergente et a pour limite l;

c. La suite s est la suite définie par

$$s_j = \begin{cases} 2^{-j} & \text{si } j \text{ est impair;} \\ 1 - 2^{-j} & \text{si } j \text{ est pair.} \end{cases}$$

d. La suite s est la suite définie par

$$s_j = \begin{cases} \dfrac{1}{j} & \text{si} \quad j = 3k \quad (k \in \mathbf{N},\ k \geqslant 1), \\[2ex] 1 - \dfrac{1}{j} & \text{sinon ;} \end{cases}$$

e. La suite s est la suite définie par $s_1 = 1$,

$$s_{2^k + p} = \frac{2p-1}{2^{k+1}} \qquad (k \in \mathbf{N},\ 1 \leqslant p \leqslant 2^k),$$ μ existe-t-elle?

2° On rappelle qu'une suite $(f_j)_{j \geqslant 1}$ de fonctions $f_j : [0,1] \to \mathbf{R}$ satisfait au *critère de Cauchy uniforme* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $j \geqslant N$ et $k \geqslant N$ entraîne la relation $\sup_{t \in [0,1]} |f_j(t) - f_k(t)| < \varepsilon$.

a. Montrer que si $(f_j)_{j \geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues $f_j : [0,1] \to \mathbf{R}$ vérifiant le critère de Cauchy uniforme et si $\mu(f_j, s)$ est défini pour tout j, alors $(\mu(f_j, s))_{j \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy de nombres réels.

b. En déduire que si $(f_j)_{j \geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues $f_j : [0,1] \to \mathbf{R}$ qui tend uniformément vers une fonction f et si $\mu(f_j, s)$ est défini pour tout j, alors $\mu(f, s)$ est définie et

$$\mu(f, s) = \lim_{j \to \infty} \mu(f_j, s).$$

II

Soient I un intervalle contenu dans $[0,1]$, $s = (s_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de nombres réels $s_j \in [0,1]$; on désigne par $N_k(\mathrm{I}, s)$ le cardinal de l'ensemble $\{j \,;\, 1 \leqslant j \leqslant k,\ s_j \in \mathrm{I}\}$. Soit $p_k(\mathrm{I}, s) = \frac{1}{k} N_k(\mathrm{I}, s)$ et soit $p(\mathrm{I}, s)$, lorsqu'elle existe, la limite

$$p(\mathrm{I}, s) = \lim_{k \to \infty} p_k(\mathrm{I}, s).$$

1° Si I et J sont des intervalles *disjoints* contenus dans $[0,1]$, montrer que l'on a

$$p(\mathrm{I} \cup \mathrm{J}, s) = p(\mathrm{I}, s) + p(\mathrm{J}, s),$$

pourvu que $p(\mathrm{I}, s)$ et $p(\mathrm{J}, s)$ soient définis.

2° Déterminer $p(\mathrm{I}, s)$ lorsque I est un intervalle contenu dans $[0,1]$ et s l'une des suites définies en I, 1°, *b*, *c*, *d*.

3° On suppose désormais la suite s telle que $p(\mathrm{I}, s)$ soit défini pour tout intervalle I. Si I est l'intervalle fermé (resp. ouvert, semi-ouvert) $[\alpha, \beta]$ (resp. $]\alpha, \beta[$, $[\alpha, \beta[$, $]\alpha, \beta]$), on désigne par $l(\mathrm{I})$ le nombre $l(\mathrm{I}) = \beta - \alpha$. Montrer que si pour tout intervalle I, on a $p(\mathrm{I}, s) = l(\mathrm{I})$, alors $\mu(f, s)$ est définie pour toute fonction continue f et $\mu(f, s) = \int_0^1 f(t)\, dt$.

4° Montrer que si une suite s est telle que pour toute fonction continue f, $\mu(f, s)$ est défini et égal à $\int_0^1 f(t)\, dt$, alors $p(\mathrm{I}, s)$ est défini et égal à $l(\mathrm{I})$ pour tout intervalle $\mathrm{I} \subset [0,1]$.

On dira que la suite $s = (s_j)$ est *régulière* si elle vérifie

$$p(\mathrm{I}, s) = l(\mathrm{I})$$

pour tout intervalle $\mathrm{I} \subset [0,1]$.

5° Soit $s = (s_j)$ une suite régulière ; déterminer

a. $\displaystyle\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} (s_1{}^n + s_2{}^n + \ldots + s_k{}^n) \qquad (n \in \mathbf{N})$;

b. $\displaystyle\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} (\cos 2n\pi s_1 + \cos 2n\pi s_2 + \ldots + \cos 2n\pi s_k)$,

$\displaystyle\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} (\sin 2n\pi s_1 + \sin 2n\pi s_2 + \ldots + \sin 2n\pi s_k)$

$(n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 1)$.

1° Soit $p_n(x,t) = \dfrac{1}{n} \dfrac{\sin^2 n\pi(x-t)}{\sin^2 \pi(x-t)}$ $(n \geqslant 1)$. Indiquer comment on peut prolonger p_n en une fonction continue au point $x = t$.

Montrer qu'il existe des constantes réelles $a_{n,k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ et $b_{n,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ telles que

$$p_n(x,t) = a_{n,0} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k} \cos 2k\pi(x-t) + \sum_{k=1}^{n-1} b_{n,k} \sin 2k\pi(x-t).$$

Calculer l'intégrale $\int_0^1 p_n(x,t)\,dt$. Montrer que, si $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$, on a l'inégalité

$$\int_0^{x-\varepsilon} p_n(x,t)\,dt + \int_{x+\varepsilon}^1 p_n(x,t)\,dt \leqslant \frac{1}{n\sin^2 \pi\varepsilon}.$$

2° Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Soit f_n $(n \geqslant 1)$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \int_0^1 f(t)\,p_n(x,t)\,dt \qquad (x \in [0,1]).$$

Montrer qu'il existe des constantes réelles

$\alpha_{n,k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ et $\beta_{n,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$

telles que

$$f_n(x) = \alpha_{n,0} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k} \cos 2k\pi x + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{n,k} \sin 2k\pi x.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers f, uniformément sur $[0,1]$.

3° Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$ et soient f_n les fonctions définies par

$$f_n(x) = \int_0^1 f(t)\,p_n(x,t)\,dt.$$

Soit $s = (s_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de réels $s_j \in [0,1]$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait

$$\text{(A)} \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k}(\cos 2n\pi s_1 + \cos 2n\pi s_2 + \dots + \cos 2n\pi s_k) = 0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k}(\sin 2n\pi s_1 + \sin 2n\pi s_2 + \dots + \sin 2n\pi s_k) = 0. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mu(f_n, s) = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

En déduire que $\mu(f, s) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

4° Soit $s = (s_j)$ une suite vérifiant les conditions (A) de la question précédente. Soit $I = [\alpha, \beta]$, $0 < \alpha \leqslant \beta < 1$. Soit (φ_k) la suite de fonctions définies, pour k entier suffisamment grand, par

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \alpha - \frac{1}{k} \text{ ou } \beta + \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \\ kt - k\alpha + 1 & \text{si } \alpha - \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant \alpha, \\ k\beta - kt + 1 & \text{si } \beta \leqslant t \leqslant \beta + \frac{1}{k}, \end{cases}$$

et (ψ_k) la suite de fonctions définies, pour k entier suffisamment grand, par

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \alpha \text{ ou } \beta \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } \alpha + \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant \beta - \frac{1}{k}, \\ kt - k\alpha & \text{si } \alpha \leqslant t \leqslant \alpha + \frac{1}{k}, \\ k\beta - kt & \text{si } \beta - \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant \beta. \end{cases}$$

Montrer les inégalités $\mu_n(\psi_k, s) \leqslant p_n(I, s) \leqslant \mu_n(\varphi_k, s)$. En déduire que $p(I, s)$ est défini et égal à $l(I)$. Montrer que si la suite (s_j) vérifie les conditions (A), elle est régulière.

5° Soit $\theta \in [0,1]$ un nombre *irrationnel.* Montrer que, si n est un entier non nul,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \exp(2i\pi j n\theta) = 0.$$

En déduire que la suite $(s_j)_{j \geqslant 1}$, où $s_j = j\theta - E(j\theta)$, est régulière ($E(t)$ désignant la partie entière d'un nombre réel t).