Exercices sur les développements limités.

Remarque : les exercices concernant l'utilisation des d.l. pour étudier localement une fonction (continuité et dérivabilité en un point), se trouvent dans la partie "dérivabilité".

Exercice 1 : Montrer que le développement limité d'ordre n en 0 de $\operatorname{th}\dfrac{1}{x^2}$ vaut 1 quel que soit $n > 0$.

Exercice 2 : En utilisant la formule de Taylor-Young, calculer le *d.l.* de $\arctan x$ à l'ordre 3 au voisinage de 1. Puis retrouver ce résultat à partir du *d.l.* de la dérivée d'$\arctan x$ au voisinage de 1.

Exercice 3 : Donner la réponse, en la justifiant, aux questions suivantes :

a) La fonction $x \mapsto \ln x$ a-t-elle un développement limité en zéro ?

b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ a-t-elle un développement limité d'ordre 1 en zéro ?

c) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^5}$ possède-t-elle un développement limité en zéro d'ordre 1 ? d'ordre 2 ? d'ordre 3 ?

d) La fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ possède-t-elle un développement limité en zéro d'ordre n ?

Exercice 4 : Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes

$a)$	$(1+\arctan x)(e^x+2\sin x)$	(ordre 3)
$b)$	$(1+2\cos(2x))(x-\ln(1+x))$	(ordre 5)
$c)$	$\dfrac{1+\arctan x}{\cos x}$	(ordre 4)
$d)$	$\dfrac{x}{e^x-1}$	(ordre 5)
$e)$	$\dfrac{\ln(1+x^3)}{x-\sin x}$	(ordre 3)
$f)$	$\sqrt{1+2\cos x}$	(ordre 2)
$g)$	$e^{\sqrt{1+2\cos x}}$	(ordre 2)
$h)$	$(1+x)^{1/x}$	(ordre 2)
$i)$	$\ln\dfrac{\sin x}{x}$	(ordre 4)
$j)$	$\sqrt[3]{1+\ln(1+x)}$	(ordre 3)
$k)$	$\cos(e^{\frac{x}{\cos x}})$	(ordre 4)

Exercice 5 : Calculer le développement limité à l'ordre 3 en zéro de la fonction f définie par

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}\ .$$

Exercice 6 : Calculer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$f(x)=\frac{e^{e^x}-e^{e^{-x}}}{\ln(1+x)}\ .$$

Exercice 7 : Calculer le développement limité en zéro à l'ordre 2 de

$$f(x)=\frac{e^{\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{x^2}{\sin x}\right)}-e}{\ln(1+x)}\ .$$

Exercice 8 : Trouver le développement limité à l'ordre 3 en $\pi/4$ de $f(x)=(\tan x)^{\tan(2x)}$.

Exercice 9 : Trouver un équivalent simple, lorsque x tend vers zéro des fonctions suivantes

$a)$ $x(1+\cos x) - 2\tan x$ $\qquad$ $b)$ $e^{\cos x} + e^{\operatorname{ch} x} - 2e$

$c)$ $\sqrt{\sin x} - \sqrt[4]{x \tan x}$ $\qquad$ $d)$ $(2e\cos x - e^{x+1})^{\ln x}$

$e)$ $1 + \dfrac{\ln \cos x}{\ln \operatorname{ch} x}$ $\qquad$ $f)$ $\dfrac{2-\tan x}{1+e^{-x}} - \dfrac{4}{4+x^2}$

Exercice 10 : Calculer les limites des fonctions suivantes en utilisant les développements limités.

$a)$ $\dfrac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$ $(x \to 0)$ $\qquad$ $b)$ $\left(\dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\right)^{1/x^2}$ $(x \to 0)$

$c)$ $\dfrac{8^x - 4^x}{3^x - 2^x}$ $(x \to 0)$ $\qquad$ $d)$ $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1}$ $(x \to e)$

$e)$ $\dfrac{x^e - e^x}{(x-e)^2}$ $(x \to e)$ $\qquad$ $f)$ $\left(\dfrac{1}{2}(a^{1/x} + b^{1/x})\right)^x$ $(x \to \infty)$

$g)$ $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{1/x}$ $(x \to 0)$ $\qquad$ $h)$ $\dfrac{(2x - x^3)^{1/3} - \sqrt{x}}{1 - x^{3/4}}$ $(x \to 1)$

$i)$ $\dfrac{(\operatorname{ch} x)^{-1/x^2} - (\cos x)^{1/x^2}}{\operatorname{ch} x - \cos x}$ $(x \to 0)$ $\qquad$ $j)$ $\operatorname{cotan}^2 x - \dfrac{1}{x^2}$ $(x \to 0)$

Exercice 11 : Calculer la limite lorsque x tend vers e de

$$f(x) = \frac{x^e - e^x}{1 - \cos(x-e)} .$$

Exercice 12 : En utilisant les développements limités, trouver la limite quand x tend vers 0 de

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{4+x}} + e^{\sqrt{4-x}} - 2e^2}{\tan^2 x} .$$

(On justifiera le choix de l'ordre auquel on commence les calculs, et on détaillera les calculs intermédiaires).

Exercice 13 : Calculer la limite lorsque x tend vers $\pi/2$ de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{3 - \sin^2 x}}{\cos^2 x} ,$$

en indiquant comment vous choisissez l'ordre des développements limités que vous utilisez.

Exercice 14 : Sans utiliser de *d.l.* , étudier les asymptotes et la position de la courbe par rapport aux asymptotes lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$ dans les cas suivants :

$$
\begin{array}{ll}
a) & f(x) = \ln\left(e^{2x} + 3e^{-3x} + 1\right) \\
b) & f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 + 1} \\
c) & f(x) = \sqrt{x^4 + x^3} - x^2
\end{array}
$$

Exercice 15 : En utilisant les *d.l.* étudier à l'infini, les fonctions suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
a) & f(x) = \sqrt{x(2+x)}\, e^{1/x} \\
b) & f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 - x + 2} \\
c) & f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} \\
d) & f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 3e^{-3x} + 1)
\end{array}
$$

Exercice 16 : a) Ecrire le développement limité à l'ordre 2 en zéro de la fonction g définie par

$$g(u) = \ln\frac{\ln(1+2u)}{\ln(1+u)} \ .$$

(On justifiera le choix de l'ordre auquel on commence les calculs, et on détaillera les calculs intermédiaires).

b) En déduire le comportement à $+\infty$ de la fonction f définie par

$$f(x) = x\ln\frac{\ln(2+x) - \ln x}{\ln(1+x) - \ln x} \ .$$

(Equation de l'asymptote, position de la courbe par rapport à l'asymptote et dessin (on prendra $\ln 2 = 0,7$)).

Exercice 17 : a) Soit a et b deux réels. Donner le développement limité à l'ordre n en 0 de

$$g(x) = \ln\frac{1+ax}{1+bx} \ .$$

b) Soit f la fonction définie, lorsque cela a un sens, par

$$f(x) = (3x^2 + 6x - 10)\ln\frac{x+4}{x+2} \ .$$

Montrer qu'elle admet un développement asymptotique lorsque x tend vers l'infini, de la forme

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right) \ ,$$

où α, β et γ sont des réels non nuls.
En déduire le comportement de la courbe représentative de f à $+\infty$ et à $-\infty$. (Asymptote, position par rapport à l'asymptote et dessin).

Exercice 18 : Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\ .$$

a) Montrer qu'au voisinage de l'infini, on a

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)\ .$$

Interpréter géométriquement ce résultat en faisant le dessin correspondant.

b) Etudier et représenter graphiquement la fonction f. (On pourra prendre le nombre 2 comme valeur approchée de $\sqrt{5}$).

Corrigé des exercices sur les développements limités.

Remarque : Les calculs de quotients de d.l. ont été effectués dans ce qui suit en utilisant la méthode de division suivant les puissances croissantes. On peut, bien sûr, utiliser d'autres méthodes.

1) On veut donc montrer que, pour tout entier n

$$\mathrm{th}\,\frac{1}{x^2} = 1 + \circ(x^n)\ ,$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{th}\,\dfrac{1}{x^2} - 1}{x^n} = \circ(1)\ ,$$

ce qui signifie que l'expression de gauche tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini. Mais

$$\mathrm{th}\,\frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1 - e^{-2/x^2}}{1 + e^{-2/x^2}} - 1 = \frac{-2e^{-2/x^2}}{1 + e^{-2/x^2}}\ .$$

En posant

$$u = \frac{1}{x^2}\ ,$$

soit

$$x = \frac{1}{\sqrt{u}}\ ,$$

on obtient

$$\frac{\mathrm{th}\,\dfrac{1}{x^2} - 1}{x^n} = u^{-n/2}\frac{-e^{-2u}}{1 + e^{-2u}}\ ,$$

et lorsque x tend vers zéro, u tend vers $+\infty$. Il résulte du critère de croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances que cette quantité tend bien vers zéro, ce qui donne le résultat voulu.

2) Posons $f(x) = \arctan x$. On a donc

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\ ,\ f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\ ,\ f^{(3)}(x) = -2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}\ ,$$

d'où

$$f(1) = \frac{\pi}{4}\ ,\ f'(1) = \frac{1}{2}\ ,\ f''(1) = -\frac{1}{2}\ ,\ f^{(3)}(1) = \frac{1}{2}\ .$$

En utilisant la formule de Taylor-Young, on a alors

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + \circ((x-1)^3)\ .$$

Partons maintenant de $f'(x)$, et posons $h = x - 1$. On a donc

$$f'(1+h) = \frac{1}{1+(1+h)^2} = \frac{1}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+h+\dfrac{h^2}{2}}\ .$$

On effectue un *d.l.* à l'ordre 2 de cette fonction puis on intégre pour retrouver le *d.l.* d'ordre 3 de f. En utilisant le *d.l.* de $1/(1+u)$ on a

$$f'(1+h) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(h + \frac{h^2}{2}\right) + \left(h + \frac{h^2}{2}\right)^2\right] + \circ(h^2) = \frac{1}{2} - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \circ(h^2) \ .$$

En intégrant

$$f(1+h) = f(1) + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{12} + \circ(h^3) \ .$$

On retrouve bien le *d.l.* obtenu plus haut.

3) a) Lorsque x tend vers zéro, $x \mapsto \ln x$ n'a pas de limite finie, donc pas de *d.l.* d'ordre 0, ni d'aucun autre ordre.

b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en zéro, donc n'a pas de *d.l.* d'ordre 1 en zéro, ni d'aucun ordre supérieur à 1.

c) On a

$$\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x} = \circ(x^2) \ .$$

Donc elle possède des *d.l.* d'ordre 1 et 2 en zéro. Si elle possédait un *d.l.* d'ordre 3, il serait de la forme

$$\sqrt{x^5} = ax^3 + \circ(x^3) \ ,$$

et l'on aurait

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^5}}{x^3} = a \ ,$$

ce qui n'est pas le cas, puisque cette limite est infinie. Donc la fonction ne possède pas de *d.l.* d'ordre 3 en zéro.

d) On a, pour tout entier n positif

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} e^{-1/x^2} = 0 \ .$$

Donc

$$e^{-1/x^2} = \circ(x^n) \ .$$

La fonction possède un *d.l.* d'ordre n pour tout entier n.

4) a) On part des *d.l.* de $\arctan x$, e^x et $\sin x$ à l'ordre 3 en zéro.

$$1 + \arctan x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + \circ(x^3) \ ,$$

et

$$e^x + 2\sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + 2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \circ(x^3) = 1 + 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \ .$$

On effectue le produit en tronquant à l'ordre 3.

$$(1 + \arctan x)(e^x + 2\sin x) = 1 + 4x + \frac{7x^2}{2} + \circ(x^3) \ .$$

b) On part du *d.l.* à l'ordre 5 de $\ln(1+x)$

$$x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right) + \circ(x^5)\ .$$

Le premier terme non nul du *d.l.* de $x - \ln(1+x)$ est de degré 2. On peut donc mettre x^2 en facteur.

$$x - \ln(1+x) = x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \circ(x^3)\right) = x^2 f(x)\ .$$

Il suffira donc du *d.l.* de $1 + 2\cos 2x$ à l'ordre 3. Tout d'abord

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \circ(u^3)\ .$$

Donc en posant $u = 2x$

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \circ(x^3)\ .$$

D'où

$$1 + 2\cos 2x = 3 - 4x^2 + \circ(x^3)\ .$$

On effectue, en le tronquant à l'ordre 3, le produit $f(x)(1 + 2\cos 2x)$

$$\left(3 - 4x^2 + \circ(x^3)\right)\left(\frac{1}{2} + -\frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \circ(x^3)\right)\ ,$$

et l'on obtient

$$f(x)(1 + 2\cos 2x) = \frac{3}{2} - x - \frac{5x^2}{4} + \frac{11x^3}{15} + \circ(x^3)\ .$$

Alors

$$(1+2\cos 2x)(x-\ln(1+x)) = x^2\left(\frac{3}{2} - x - \frac{5x^2}{4} + \frac{11x^3}{15} + \circ(x^3)\right) = \frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{5x^4}{4} + \frac{11x^5}{15} + \circ(x^5)\ .$$

c) Le dénominateur de la fraction ne s'annulant pas en zéro, on effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4.

$$\begin{array}{rrrrr|lllll}
1 & +x & & -x^3/3 & & 1 & & -x^2/2 & & +x^4/24 \\ \cline{6-10}
-1 & & +x^2/2 & & -x^4/24 & 1 & +x & +x^2/2 & +x^3/6 & +5x^4/24 \\ \cline{1-5}
 & x & +x^2/2 & -x^3/3 & -x^4/24 & & & & & \\
 & -x & & +x^3/2 & & & & & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2/2 & +x^3/6 & -x^4/24 & & & & & \\
 & & -x^2/2 & & +x^4/4 & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & x^3/6 & +5x^4/24 & & & & & \\
 & & & -x^3/6 & & & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & +5x^4/24 & & & & & \\
 & & & & -5x^4/24 & & & & & \\ \cline{5-5}
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}$$

Donc

$$\frac{1 + \arctan x}{\cos x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{24} + \circ(x^4)\ .$$

d) Le premier terme non nul du *d.l.* du dénominateur étant de degré 1, on part de l'ordre 6. On a

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \circ(x^6) \ .$$

Et donc

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{24} + \dfrac{x^4}{120} + \dfrac{x^5}{720} + \circ(x^5)} \ .$$

On effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 5 suivante :

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr}
1 & & & & & & 1 & +x/2 & +x^2/6 & +x^3/24 & +x^4/120 & +x^5/720 \\ \cline{7-12}
-1 & -x/2 & -x^2/6 & -x^3/24 & -x^4/120 & -x^5/720 & 1 & -x/2 & +x^2/12 & & -x^4/720 & \\ \cline{1-6}
 & -x/2 & -x^2/6 & -x^3/24 & -x^4/120 & -x^5/720 & & & & & & \\
 & x/2 & +x^2/4 & +x^3/12 & +x^4/48 & +x^5/240 & & & & & & \\ \cline{2-6}
 & & x^2/12 & +x^3/24 & +x^4/80 & +x^5/360 & & & & & & \\
 & & -x^2/12 & -x^3/24 & -x^4/72 & -x^5/288 & & & & & & \\ \cline{3-6}
 & & & & -x^4/720 & -x^5/1440 & & & & & & \\
 & & & & x^4/720 & +x^5/1440 & & & & & & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

On a donc finalement

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \circ(x^5) \ .$$

e) Le premier terme non nul du *d.l.* du dénominateur est de degré 3. On part donc de *d.l.* à l'ordre 6.

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \circ(x^6) \ ,$$

et

$$\ln(1 + x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \circ(x^6) \ .$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x^3)}{x - \sin x} &= \frac{x^3 - \dfrac{x^6}{2} + \circ(x^6)}{\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120} + \circ(x^6)} \\
&= 6\,\frac{1 - \dfrac{x^3}{2} + \circ(x^3)}{1 - \dfrac{x^2}{20} + \circ(x^3)} \\
&= 6\left(1 - \frac{x^3}{2} + \circ(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{20} + \circ(x^3)\right) \\
&= 6 + \frac{3x^2}{10} - 3x^3 + \circ(x^3) \ .
\end{aligned}$$

f) On a tout d'abord

$$1 + 2\cos x = 3 - x^2 + \circ(x^2) \ ,$$

Donc

$$\sqrt{1 + 2\cos x} = \sqrt{3 - x^2 + \circ(x^2)} = \sqrt{3}\,\left(1 - \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right)^{1/2} \ .$$

On utilise le *d.l.* de $(1+u)^m$ en zéro avec $m = 1/2$. Donc

$$\sqrt{1+2\cos x} = \sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right) = \sqrt{3}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right).$$

g) En utilisant l'exercice précédent

$$e^{\sqrt{1+2\cos x}} = e^{\sqrt{3}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right)} = e^{\sqrt{3}}\, e^{\left(-\frac{\sqrt{3}x^2}{6} + \circ(x^2)\right)} .$$

On utilise alors le *d.l.* de e^x en zéro, d'où

$$e^{\sqrt{1+2\cos x}} = e^{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{\sqrt{3}x^2}{6}\right) + \circ(x^2) .$$

h) On écrit

$$(1+x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} .$$

Puisque l'on divise par x, on part d'un *d.l.* de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3) .$$

On obtient

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right)} = e\, e^{\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right)} .$$

On utilise alors le *d.l.* de e^x à l'ordre 2 en zéro.

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e\left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2\right] + \circ(x^2) = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24}\right) + \circ(x^2) .$$

i) Puisque l'on divise par x, on part d'un *d.l.* de $\sin x$ à l'ordre 5.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \circ(x^5) .$$

Donc

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \circ(x^4)\right) .$$

On utilise alors le *d.l.* à l'ordre 4 en zéro de $\ln(1+x)$. (En tenant compte du fait que l'expression ne dépend que de x^2, l'ordre 2 suffira).

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)^2 + \circ(x^4) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \circ(x^4) .$$

j) En partant du *d.l.* à l'ordre 3 en zéro de $\ln(1+x)$, on a donc

$$\sqrt[3]{1+\ln(1+x)} = \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right)^{1/3} .$$

On utilise le *d.l.* de $(1+u)^{1/3}$ à l'ordre 3 en zéro :

$$(1+u)^{1/3} = 1+\frac{u}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{u^2}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{u^3}{6}+\circ(u^3) = 1+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{9}+\frac{5u^3}{81}+\circ(u^3)\ .$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+\ln(1+x)} &= 1+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{9}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^2+\frac{5}{81}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^3+\circ(x^3)\\
&= 1+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{9}(x^2-x^3)+\frac{5}{81}x^3+\circ(x^3)\\
&= 1+\frac{x}{3}-\frac{5x^2}{18}+\frac{23x^3}{81}+\circ(x^3)\ .
\end{aligned}$$

k) On part du *d.l.* en zéro à l'ordre 3 de $\cos x$.

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^3)\ .$$

Donc

$$\frac{x}{\cos x} = \frac{x}{1-\dfrac{x^2}{2}+\circ(x^3)} = x\left(1+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3)\right) = x+\frac{x^3}{2}+\circ(x^4)\ .$$

Alors

$$g(x) = e^{\left(\frac{x}{\cos x}\right)} = e^{\left(x+\frac{x^3}{2}+\circ(x^4)\right)}\ .$$

En utilisant le *d.l.* en zéro à l'ordre 4 de l'exponentielle, on a

$$\begin{aligned}
e^{\left(\frac{x}{\cos x}\right)} &= 1+\left(x+\frac{x^3}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{2}\right)^3+\frac{1}{24}\left(x+\frac{x^3}{2}\right)^4+\circ(x^4)\\
&= 1+x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\\
&= 1+u(x)\ ,
\end{aligned}$$

où

$$u(x) = x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}+\circ(x^4)\ .$$

Alors

$$\cos g(x) = \cos(1+u(x)) = \cos 1\cos u(x)-\sin 1\sin u(x)\ .$$

Comme $u(0)=0$, on peut utiliser maintenant les *d.l.* de $\sin x$ et $\cos x$ à l'ordre 4 en zéro. On a donc

$$\begin{aligned}
\cos u(x) &= 1-\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}\right)^4+\circ(x^4)\\
&= 1-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3+\frac{x^4}{4}+\frac{4x^4}{3}\right)+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\\
&= 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{3x^4}{4}+\circ(x^4)\ ,
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
\sin u(x) &= \left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}\right)^3+\circ(x^4)\\
&= x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}-\frac{1}{6}\left(x^3+\frac{3x^4}{2}\right)+\circ(x^4)\\
&= x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{7x^4}{24}+\circ(x^4)\ .
\end{aligned}$$

Alors, en remplaçant

$$\cos(e^{\frac{x}{\cos x}}) = \cos 1 - x\sin 1 - \frac{\cos 1+\sin 1}{2}x^2 - \frac{\cos 1+\sin 1}{2}x^3 - \frac{18\cos 1+7\sin 1}{24}x^4+\circ(x^4)\ .$$

5) On écrit

$$f(x) = e^{\left(\frac{\ln(1+x)}{\sin x}\right)}\ ,$$

et l'on cherche le *d.l.* de

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x}\ ,$$

à l'ordre 3 en zéro. Comme le dénominateur $\sin x = x + \circ(x)$, a une partie principale de degré 1, on commence les calculs à l'ordre 4. On a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\circ(x^4)\ ,$$

et

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}+\circ(x^4)\ ,$$

donc

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\circ(x^4)}{x-\frac{x^3}{6}+\circ(x^4)}\\
&= \frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\circ(x^3)}{1-\frac{x^2}{6}+\circ(x^3)}\\
&= \left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)\left(1+\frac{x^2}{6}\right)+\circ(x^3)\\
&= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)\ .
\end{aligned}$$

Alors

$$f(x) = e^{\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\circ(x^2)\right)} = e\, e^{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)\right)}\ ,$$

et en utilisant le *d.l.* à l'ordre 3 en zéro de l'exponentielle

$$\begin{aligned} f(x) &= e\left[1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)^3\right]+\circ(x^3) \\ &= e\left[1-\frac{x}{2}+\frac{5x^2}{8}-\frac{29x^3}{48}\right]+\circ(x^3)\ . \end{aligned}$$

6) On a au dénominateur $ln(1+x) = x + \circ(x)$. On commencera donc le calcul à l'ordre 3.
On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\ ,$$

donc

$$\begin{aligned} e^{e^x} &= e^{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\right)} \\ &= e\,e^{\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\right)} \\ &= e\left[1+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)^3+\circ(x^3)\right] \\ &= e\left[1+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}(x^2+x^3)+\frac{x^3}{6}\right]+\circ(x^3) \\ &= e\left[1+x+x^2+\frac{5x^3}{6}\right]+\circ(x^3)\ . \end{aligned}$$

En changeant alors x en $-x$ dans la formule précédente, on obtient

$$e^{e^{-x}} = e\left[1-x+x^2-\frac{5x^3}{6}\right]+\circ(x^3)\ .$$

Donc

$$e^{e^x} - e^{e^{-x}} = e\left(2x+\frac{5x^3}{3}\right)+\circ(x^3)\ .$$

On aura alors

$$f(x) = \frac{e\left(2x+\frac{5x^3}{3}\right)+\circ(x^3)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)} = \frac{e\left(2+\frac{5x^2}{3}\right)+\circ(x^2)}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)}\ .$$

On effectue la division suivant les puissances croissantes ;

$$\begin{array}{rrr|lll} 2 & & +5x^2/3 & 1 & -x/2 & +x^2/3 \\ \cline{4-6} -2 & +x & -2x^2/3 & 2 & +x & +3x^2/2 \\ \hline & x & +x^2 & & & \\ & -x & +x^2/2 & & & \\ \cline{2-3} & & 3x^2/2 & & & \\ & & -3x^2/2 & & & \\ \cline{3-3} & & 0 & & & \end{array}$$

Finalement

$$f(x) = e\left(2 + x + \frac{3x^2}{2}\right) + \circ(x^2)\ .$$

7) Le dénominateur $\ln(1+x)$ a un *d.l.* qui commence par une terme de degré 1. On développe donc le numérateur à l'ordre 3. On a successivement

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^3)\ ,$$

et

$$\frac{x^2}{\sin x} = \frac{x^2}{x - \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)} = \frac{x}{1 - \dfrac{x^2}{6} + \circ(x^2)} = x\left(1 + \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right) = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\ .$$

Donc

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{x^2}{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\ .$$

Alors

$$e^{\left(\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{x^2}{\sin x}\right)} = e^{1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)} = e\, e^{x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)}\ .$$

En utilisant le *d.l.* de l'exponentielle en zéro à l'ordre 3, on obtient

$$\begin{aligned}
e^{\left(\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{x^2}{\sin x}\right)} &= e\left[1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^3 + \circ(x^3)\right] \\
&= e\left[1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}(x^2 + x^3) + \frac{x^3}{6}\right] + \circ(x^3) \\
&= e\left[1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6}\right] + \circ(x^3)
\end{aligned}$$

.

Finalement

$$e^{\left(\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{x^2}{\sin x}\right)} - e = e\left[x + x^2 + \frac{5x^3}{6}\right] + \circ(x^3)\ .$$

Alors

$$f(x) = \frac{e\left[x + x^2 + \dfrac{5x^3}{6}\right] + \circ(x^3)}{x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)} = \frac{e\left[1 + x + \dfrac{5x^2}{6}\right] + \circ(x^2)}{1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \circ(x^2)}\ .$$

En effectuant la divisions suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{rrr|lll}
1 & +x & +5x^2/6 & 1 & -x/2 & +x^2/3 \\ \cline{4-6}
-1 & +x/2 & -x^2/3 & 1 & +3x/2 & +5x^2/4 \\ \cline{1-3}
 & 3x/2 & +x^2/2 & & & \\
 & -3x/2 & +3x^2/4 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 5x^2/4 & & & \\
 & & -5x^2/4 & & & \\ \cline{3-3}
 & & 0 & & &
\end{array}$$

On a donc finalement
$$f(x) = e\left[1 + \frac{3x}{2} + \frac{5x^2}{4}\right] + \circ(x^2)\ .$$

8) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - \pi/4$. On obtient alors
$$\tan x = \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}\ .$$

Par ailleurs,
$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right) = \frac{1}{\tan(-2h)} = -\frac{1}{\tan 2h}\ .$$

Donc
$$f(x) = f\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}\right)^{-1/\tan 2h} = e^{-g(h)}\ ,$$

où
$$g(h) = \frac{1}{\tan 2h} \ln\left(\frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}\right)\ .$$

Comme $\tan 2h$ s'annule en zéro, et que le premier terme non nul de son *d.l.* est de degré 1, il faut donc commencer le calcul avec un *d.l.* d'ordre 4 en zéro de $\tan h$:
$$\tan h = h + \frac{h^3}{3} + \circ(h^4)\ .$$

Donc
$$\frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} = \frac{1 + h + \frac{h^3}{3} + \circ(h^4)}{1 - h - \frac{h^3}{3} + \circ(h^4)}\ .$$

On effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr}
1 & +h & & +h^3/3 & & 1 & -h & & -h^3/3 & \\
\cline{6-10}
-1 & +h & & +h^3/3 & & 1 & +2h & +2h^2 & +8h^3/3 & +10h^4/3 \\
\cline{1-5}
 & 2h & & +2h^3/3 & & & & & & \\
 & -2h & +2h^2 & & +2h^4/3 & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & 2h^2 & +2h^3/3 & +2h^4/3 & & & & & \\
 & & -2h^2 & +2h^3 & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 8h^3/3 & +2h^4/3 & & & & & \\
 & & & -8h^3/3 & +8h^4/3 & & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & +10h^4/3 & & & & & \\
 & & & & -10h^4/3 & & & & & \\
\cline{5-5}
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}$$

Donc
$$\frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{8h^3}{3} + \frac{10h^4}{3} + \circ(h^4)\ .$$

On a alors
$$\ln\frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} = \ln\left(1 + 2h + 2h^2 + \frac{8h^3}{3} + \frac{10h^4}{3} + \circ(h^4)\right) = \ln(1 + u(h))\ ,$$

où
$$u(h) = 2h + 2h^2 + \frac{8h^3}{3} + \frac{10h^4}{3} + \circ(h^4)\ .$$
Comme cette expression tend vers zéro, on utilise alors le *d.l.* de $\ln(1+u)$ à l'ordre 4 en zéro.

$$\begin{aligned}
\ln\frac{1+\tan h}{1-\tan h} &= \left(2h + 2h^2 + \frac{8h^3}{3} + \frac{10h^4}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(2h + 2h^2 + \frac{8h^3}{3} + \frac{10h^4}{3}\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(2h + 2h^2 + \frac{8h^3}{3} + \frac{10h^4}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(2h + 2h^2 + \frac{8h^3}{3} + \frac{10h^4}{3}\right)^4 + \circ(h^4) \\
&= 2h + 2h^2 + \frac{8h^3}{3} + \frac{10h^4}{3} - \frac{1}{2}\left(4h^2 + 8h^3 + 4h^4 + \frac{32h^4}{3}\right) + \frac{1}{3}(8h^3 + 24h^4) - \frac{16h^4}{4} + \circ(h^4) \\
&= 2h + \frac{4h^3}{3} + \circ(h^4)\ .
\end{aligned}$$

(Remarque : la fonction qui à h associe $\ln\dfrac{1+\tan h}{1+\tan h}$ étant impaire, il est normal que son *d.l.* le soit également).

Par ailleurs
$$\tan 2h = 2h + \frac{8h^3}{3} + \circ(h^4)\ .$$

On a alors
$$\begin{aligned}
g(h) &= \frac{2h + \dfrac{4h^3}{3} + \circ(h^4)}{2h + \dfrac{8h^3}{3} + \circ(h^4)} \\
&= \frac{1 + \dfrac{2h^2}{3} + \circ(h^3)}{1 + \dfrac{4h^2}{3} + \circ(h^3)} \\
&= \left(1 + \frac{2h^2}{3}\right)\left(1 - \frac{4h^2}{3}\right) + \circ(h^3) \\
&= 1 - \frac{2h^2}{3} + \circ(h^3)\ .
\end{aligned}$$

Alors
$$\begin{aligned}
f\left(h + \frac{\pi}{4}\right) &= e^{-g(h)} \\
&= e^{\left(-1 + \frac{2h^2}{3} + \circ(h^3)\right)} \\
&= e^{-1}\, e^{\left(\frac{2h^2}{3} + \circ(h^3)\right)}\ .
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le *d.l.* de e^x en zéro pour obtenir
$$f\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = e^{-1}\left(1 + \frac{2h^2}{3}\right) + \circ(h^3)\ .$$

Finalement
$$f(x) = e^{-1}\left(1 + \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right) + \circ\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)\ .$$

9) Remarque : dans cet exercice on ne peut savoir *a priori* à quel ordre choisir les *d.l.* que l'on utilise, les démonstrations sont données avec l'ordre nécessaire pour obtenir l'équivalent cherché. En général, on choisit un ordre de départ, s'il est insuffisant pour conclure, on recommence les calculs en augmentant l'ordre.

a) En effectuant un *d.l.* à l'ordre 3,

$$x(1+\cos x)-2\tan x = x\left(1+1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^3)\right)-2\left(x+\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)\right) = -\frac{7x^3}{6}+\circ(x^3)\sim -\frac{7x^3}{6}\ .$$

b) En effectuant un *d.l.* à l'ordre 4,

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e^{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)} \\ &= e\,e^{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\circ(x^4)\right)} \\ &= e\left[1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+\circ(x^4)\right] \\ &= e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}\right)+\circ(x^4)\ . \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{ch} x} &= e^{\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)} \\ &= e\,e^{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\circ(x^4)\right)} \\ &= e\left[1+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+\circ(x^4)\right] \\ &= e\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}\right)+\circ(x^4)\ . \end{aligned}$$

Alors

$$e^{\cos x}+e^{\operatorname{ch} x}-2e = \frac{ex^4}{3}+\circ(x^4)\sim\frac{ex^4}{3}\ .$$

c) Pour x tendant vers 0^+, on a

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{x-\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)} = \sqrt{x}\left(1-\frac{x^2}{6}+\circ(x^2)\right)^{1/2}\ .$$

Donc, en utilisant le *d.l.* en zéro de $(1+u)^{1/2}$,

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{x}\left(1-\frac{x^2}{12}+\circ(x^2)\right)\ .$$

De même,

$$\sqrt[4]{x\tan x} = \sqrt[4]{x^2+\frac{x^4}{3}+\circ(x^4)} = \sqrt{x}\left(1+\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\right)^{1/4}\ .$$

Donc, en utilisant le *d.l.* en zéro de $(1+u)^{1/4}$,

$$\sqrt{\tan x} = \sqrt{x}\left(1 + \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\right) .$$

Alors

$$\sqrt{\sin x} - \sqrt[4]{x \tan x} = -\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right) = -\frac{x^{5/2}}{6} + \circ(x^{5/2}) \sim -\frac{x^{5/2}}{6} .$$

d) On peut transformer l'expression en mettant e en facteur dans la parenthèse

$$\left(2e\ \cos x - e^{x+1}\right)^{\ln x} = e^{\ln x}\,(2\cos x - e^x)^{\ln x} = x\,(2\cos x - e^x)^{\ln x} .$$

Or, en utilisant un *d.l.* d'ordre 1 en zéro,

$$2\cos x - e^x = 2 - (1+x) + \circ(x) = 1 - x + \circ(x) ,$$

donc

$$\ln(2\cos x - e^x) = \ln(1 - x + \circ(x)) = -x + \circ(x) \sim x .$$

Alors

$$\ln x \ln(2\cos x - e^x) \sim -x \ln x ,$$

et cette expression tend vers zéro lorsque x tend vers 0^+. Donc

$$e^{\ln x \ln(2\cos x - e^x)} = (2\cos x - e^x)^{\ln x}$$

tend vers 1, et il en résulte que

$$\left(2e\ \cos x - e^{x+1}\right)^{\ln x} = x\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 1. Donc

$$\left(2e\ \cos x - e^{x+1}\right)^{\ln x} \sim x .$$

e) On part de *d.l.* à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right)\\
&= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \circ(x^4)\\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^4) .
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\ln \mathrm{ch}\, x &= \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right)\\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \circ(x^4)\\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^4) .
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\cos x}{\ln \operatorname{ch} x} &= \frac{-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+\circ(x^4)}{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+\circ(x^4)}\\
&= \frac{-1-\dfrac{x^2}{6}+\circ(x^2)}{1-\dfrac{x^2}{6}+\circ(x^2)}\\
&= \left(-1-\frac{x^2}{6}\right)\left(1+\frac{x^2}{6}\right)+\circ(x^2)\\
&= -1-\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\ .
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$1+\frac{\ln\cos x}{\ln \operatorname{ch} x}=-\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\sim-\frac{x^2}{3}\ .$$

f) On part de *d.l.* à l'ordre 3.

$$2-\tan x = 2-x-\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)\ ,$$

et

$$1+e^{-x}=2-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\ .$$

On effectue alors la division suivant les puissances croissantes pour obtenir un *d.l.* du quotient.

$$\begin{array}{rrrr|rrrr}
2 & -x & & -x^3/3 & 2 & -x & +x^2/2 & -x^3/6 \\ \cline{5-8}
-2 & +x & -x^2/2 & +x^3/6 & 1 & & -x^2/4 & -5x^3/24 \\ \cline{1-4}
 & & -x^2/2 & -x^3/6 & & & & \\
 & & +x^2/2 & -x^3/4 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -5x^3/12 & & & & \\
 & & & +5x^3/12 & & & & \\ \cline{4-4}
 & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Donc

$$\frac{2-\tan x}{1+e^{-x}}=1-\frac{x^2}{4}-\frac{5x^3}{24}+\circ(x^3)\ .$$

Par ailleurs

$$\frac{4}{4+x^2}=\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{4}}=1-\frac{x^2}{4}+\circ(x^3)\ .$$

Finalement

$$\frac{2-\tan x}{1+e^{-x}}-\frac{4}{4+x^2}=-\frac{5x^3}{24}+\circ(x^3)\sim-\frac{5x^3}{24}\ .$$

10) a) Le *d.l.* du dénominateur ayant son premier terme non nul de degré 3, on cherche un *d.l.* d'ordre 3 du numérateur. Pour obtenir le *d.l.* d'$\arcsin x$, on part du *d.l.* d'ordre 2 de la dérivée.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\ .$$

Donc en intégrant, et puisque $\arcsin 0 = 0$,

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \ .$$

Alors

$$x - \arcsin x = -\frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \sim -\frac{x^3}{6} \ ,$$

et

$$\sin^3 x \sim x^3 \ ,$$

d'où

$$\frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} \sim -\frac{1}{6} \ ,$$

et

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{6} \ .$$

b) Comme $\operatorname{sh} x$ a un *d.l.* en zéro dont le premier terme non nul est de degré 1, et que l'on effectue une division par x^2, on partira de *d.l.* d'ordre 3. On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \ ,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)}{x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)} \\ &= \frac{1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)}{1 + \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \circ(x^2) \\ &= 1 - \frac{x^2}{3} + \circ(x^2) \ . \end{aligned}$$

Alors

$$\ln \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} = \ln\left(1 - \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right) = -\frac{x^2}{3} + \circ(x^2) \ .$$

Puis

$$\frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} = -\frac{1}{3} + \circ(1) \ .$$

Finalement

$$\left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\right)^{1/x^2} = e^{\left(\frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\right)}$$

tend vers $e^{-1/3}$.

c) On part du *d.l.* d'ordre 1 en zéro de $\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ qui vaut $1 + x \ln \alpha + \circ(x)$. On a donc

$$8^x - 4^x = (1 + x \ln 8) - (1 + x \ln 4) + \circ(x) = x \ln 2 + \circ(x) \sim x \ln 2 \ ,$$

et
$$3^x - 2^x = (1 + x\ln 3) - (1 + x\ln 2) + \circ(x) = x\ln\frac{3}{2} + \circ(x) \sim \ln\frac{3}{2} \ ,$$
donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{8^x - 4^x}{3^x - 2^x} = \frac{\ln 2}{\ln(3/2)} \ .$$

d) On pose tout d'abord $h = x - e$, et l'on cherche la limite lorsque h tend vers zéro de
$$g(h) = \frac{\sqrt{e+h} - \sqrt{e}}{\ln(e+h) - 1} \ .$$
On regarde le dénominateur.
$$\ln(e+h) - 1 = \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) \sim \frac{h}{e} \ .$$
On cherche donc un *d.l.* d'ordre 1 du numérateur.
$$\sqrt{e+h} - \sqrt{e} = \sqrt{e}\left(\sqrt{1 + \frac{h}{e}} - 1\right) = \sqrt{e}\left(1 + \frac{h}{2e} - 1 + \circ(h)\right) \sim \frac{h}{2\sqrt{e}} \ .$$
D'où
$$g(h) \sim \frac{\frac{h}{2\sqrt{e}}}{\frac{h}{e}} = \frac{\sqrt{e}}{2} \ ,$$
et la fonction tend vers $\sqrt{e}/2$.

e) On effectue le même changement de variable que dans d) et l'on cherche la limite lorsque h tend vers zéro de
$$g(h) = \frac{(e+h)^e - e^{e+h}}{h^2} \ .$$
On cherche un *d.l.* d'ordre 2 du numérateur. Tout d'abord
$$(h+e)^e = e^e\left(1 + \frac{h}{e}\right)^e \ .$$
On utilise le *d.l.* de $(1+x)^\alpha$ en zéro, pour $\alpha = e$, et $x = h/e$. Donc
$$\begin{aligned}(h+e)^e &= e^e\left(1 + e\frac{h}{e} + \frac{e(e-1)}{2}\left(\frac{h}{e}\right)^2 + \circ(h^2)\right)\\ &= e^e\left(1 + h + \frac{e-1}{2e}h^2\right) + \circ(h^2) \ .\end{aligned}$$
En utilisant le *d.l.* de l'exponentielle, on aura
$$e^{h+e} = e^e e^h = e^e\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) + \circ(h^2) \ .$$
D'où
$$(h+e)^e - e^{h+e} = -\frac{e^{e-1}}{2}h^2 + \circ(h^2) \ .$$

Alors

$$\lim_{x\to e} \frac{x^e - e^x}{(x-e)^2} = -\frac{e^{e-1}}{2} .$$

f) Posons tout d'abord $h = 1/x$. On cherche donc la limite quand h tend vers zéro de

$$g(h) = \left(\frac{1}{2}(a^h + b^h)\right)^{1/h} .$$

Comme dans le calcul figure une division par h, on part de *d.l.* à l'ordre 1. Comme dans c) on a

$$\frac{1}{2}(a^h + b^h) = \frac{1}{2}(1 + h\ln a + 1 + h\ln b + \circ(h)) = 1 + \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) + \circ(h) = 1 + h\ln\sqrt{ab} + \circ(h) .$$

Donc

$$\frac{1}{h}\ln\left(\frac{1}{2}(a^h + b^h)\right) = \frac{1}{h}\left(h\ln\sqrt{ab} + \circ(h)\right) = \ln\sqrt{ab} + \circ(1) ,$$

et cette expression tend vers $\ln\sqrt{ab}$. Alors

$$g(h) = \exp\left[\frac{1}{h}\ln\left(\frac{1}{2}(a^h + b^h)\right)\right]$$

tend vers $e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$. Donc

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}(a^{1/x} + b^{1/x})\right)^x = \sqrt{ab} .$$

g) Comme dans le calcul figure une division par x, on part de *d.l.* à l'ordre 1. On a tout d'abord

$$\frac{1-x}{1+x} = (1-x)(1-x+\circ(x)) = 1 - 2x + \circ(x) ,$$

puis

$$\frac{1}{x}\ln\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{x}\ln(1 - 2x + \circ(x)) = \frac{1}{x}(-2x + \circ(x)) = -2 + \circ(1) .$$

Alors

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/x} = \exp\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1-x}{1+x}\right]$$

tend vers e^{-2} lorsque x tend vers zéro.

h) Posons tout d'abord $h = x - 1$. On cherche donc la limite quand h tend vers zéro de

$$g(h) = \frac{(2 + 2h - (1+h)^3)^{1/3} - \sqrt{1+h}}{1 - (1+h)^{3/4}} .$$

Le premier terme non nul du *d.l.* de $1 - (1+h)^{3/4}$ vaut $-3h/4$ et est de degré 1. On cherche un *d.l.* d'ordre 1 du numérateur.

$$(2 + 2h - (1+h)^3)^{1/3} = (2 + 2h - (1 + 3h + \circ(h)))^{1/3} = (1 - h + \circ(h))^{1/3} = 1 - \frac{h}{3} + \circ(h) ,$$

et

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + \circ(h) .$$

Donc

$$(2+2h-(1+h)^3)^{1/3}-\sqrt{1+h}=-\frac{5h}{6}+\circ(h)\sim-\frac{5h}{6}\ .$$

Alors

$$g(h)\sim\frac{-\dfrac{5h}{6}}{-\dfrac{3h}{4}}=\frac{10}{9}\ .$$

Donc $\dfrac{(2x-x^3)^{1/3}-\sqrt{x}}{1-x^{3/4}}$ tend vers 10/9.

i) Le premier terme non nul du *d.l.* du dénominateur est de degré 2, puisque

$$\operatorname{ch}x-\cos x=\left(1+\frac{x^2}{2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+\circ(x^2)=x^2+\circ(x^2)\sim x^2\ .$$

Par ailleurs il existe dans l'expression de la fonction des divisions par x^2 . On commence les calculs avec des *d.l.* d'ordre 4.

$$\begin{aligned}
\ln\operatorname{ch}x &= \ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)\\
&= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+\circ(x^4)\\
&= \frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+\circ(x^4)\\
&= \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\circ(x^4)\ .
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ch}x)^{-1/x^2} &= e^{\left(-\frac{\ln\operatorname{ch}x}{x^2}\right)}\\
&= e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{12}+\circ(x^2)\right)}\\
&= e^{-1/2}\,e^{\left(\frac{x^2}{12}+\circ(x^2)\right)}\\
&= e^{-1/2}\left(1+\frac{x^2}{12}\right)+\circ(x^2)\ .
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)\\
&= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+\circ(x^4)\\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+\circ(x^4)\\
&= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\circ(x^4)\ .
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
(\cos x)^{1/x^2} &= e^{\left(\dfrac{\ln\cos x}{x^2}\right)}\\
&= e^{\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{12}+\circ(x^2)\right)}\\
&= e^{-1/2}\,e^{\left(-\dfrac{x^2}{12}+\circ(x^2)\right)}\\
&= e^{-1/2}\left(1-\frac{x^2}{12}\right)+\circ(x^2)\ .
\end{aligned}$$

On en déduit

$$(\operatorname{ch} x)^{-1/x^2}-(\cos x)^{1/x^2}=e^{-1/2}\left(\frac{x^2}{6}+\circ(x^2)\right)\sim e^{-1/2}\frac{x^2}{6}\ .$$

et finalement

$$\frac{(\operatorname{ch} x)^{-1/x^2}-(\cos x)^{1/x^2}}{\operatorname{ch} x-\cos x}\sim e^{-1/2}\frac{\dfrac{x^2}{6}}{x^2}=\frac{1}{6\sqrt{e}}\ .$$

Donc

$$\lim_{x\to0}\frac{(\operatorname{ch} x)^{-1/x^2}-(\cos x)^{1/x^2}}{\operatorname{ch} x-\cos x}=\frac{1}{6\sqrt{e}}\ .$$

j) On écrit

$$\operatorname{cotan}^2 x-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\tan^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-\tan^2 x}{x^2\tan^2 x}=\frac{(x+\tan x)(x-\tan x)}{x^2\tan^2 x}\ .$$

Or

$$x-\tan x=x-\left(x+\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)\right)=-\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)\sim-\frac{x^3}{3}\ ,$$

$$x+\tan x=2x+\circ(x)\sim 2x\ ,$$

et

$$x^2\tan^2 x\sim x^4\ .$$

Alors

$$\operatorname{cotan}^2 x-\frac{1}{x^2}\sim\frac{2x\left(-\dfrac{x^3}{3}\right)}{x^4}=-\frac{2}{3}\ .$$

Donc

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{cotan}^2 x-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2}{3}\ .$$

11) On pose tout d'abord $u=x-e$. Alors

$$f(u+e)=\frac{(u+e)^e-e^{u+e}}{1-\cos u}\ .$$

Le dénominateur $1-\cos u=u^2/2+\circ(u^2)$ à une partie principale de degré 2. On effectue donc le développement du numérateur à l'ordre 2.

Tout d'abord
$$(u+e)^e = e^e\left(1+\frac{u}{e}\right)^e \ .$$
On utilise le *d.l.* de $(1+x)^\alpha$ en zéro, pour $\alpha = e$, et $x = u/e$. Donc
$$\begin{aligned}(u+e)^e &= e^e\left(1+e\frac{u}{e}+\frac{e(e-1)}{2}\left(\frac{u}{e}\right)^2+\circ(u)\right)\\ &= e^e\left(1+u+\frac{e-1}{2e}u^2\right)+\circ(u)\ .\end{aligned}$$
En utilisant le *d.l.* de l'exponentielle, on aura
$$e^{u+e} = e^e e^u = e^e\left(1+u+\frac{u^2}{2}\right)+\circ(u^2)\ .$$
D'où
$$(u+e)^e - e^{u+e} = -\frac{e^{e-1}}{2}u^2+\circ(u^2)\ .$$
Alors
$$\lim_{x\to e} f(x) = -\frac{e^{e-1}}{2}\ .$$

12) Le dénominateur a un développement limité qui commence par un terme de degré 2. On effectue les calculs en partant de l'ordre 2 au numérateur. En utilisant le développement limité
$$\sqrt{1+u} = 1+\frac{1}{2}\frac{u}{1!}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{u^2}{2!}+\circ(u^2) = 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\circ(u^2)\ ,$$
on a tout d'abord, en remplaçant u par $x/4$,
$$\sqrt{4+x} = 2\sqrt{1+\frac{x}{4}} = 2\left(1+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{128}\right)+\circ(x^2) = 2+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{64}+\circ(x^2)\ .$$
On a donc
$$e^x = e^2\, e^{\frac{x}{4}-\frac{x^2}{64}+\circ(x^2)}\ ,$$
et comme l'exposant $\frac{x}{4}-\frac{x^2}{64}+\circ(x^2)$ tend vers zéro, on utilise le développement de l'exponentielle à l'ordre 2 en zéro :
$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\ .$$
D'où
$$e^{\sqrt{4+x}} = e^2\left[1+\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{64}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{64}\right)^2\right]+\circ(x^2)\ .$$
On développe en ne conservant que les termes de degré plus petit que 2. Il vient
$$e^{\sqrt{4+x}} = e^2\left[1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64}\right]+\circ(x^2)\ .$$
En changeant x en $-x$, on aura aussi
$$e^{\sqrt{4-x}} = e^2\left[1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64}\right]+\circ(x^2)\ .$$

Alors
$$e^{\sqrt{4+x}} + e^{\sqrt{4-x}} - 2e^2 = \frac{e^2}{32}\, x^2 + \circ(x^2)\ .$$
Comme
$$\tan^2 x = x^2 + \circ(x^2)\ ,$$
on en déduit que
$$f(x) = \frac{e^2}{32} + \circ(1)\ ,$$
et $f(x)$ tend vers $e^2/32$, lorsque x tend vers zéro.

13) Posons $u = x - \pi/2$. En remarquant que
$$\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \cos u \quad \text{et} \quad \cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin u\ ,$$
On obtient
$$f(x) = f\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+\cos u} - \sqrt{3 - \cos^2 u}}{\sin^2 u}\ .$$
On a au dénominateur $\sin^2 u = u^2 + \circ(u^2)$. On va donc chercher le *d.l.* du numérateur à l'ordre 2, en utilisant les *d.l.* à l'ordre 2 de $\cos x$ et $\sqrt{1+x}$. On a donc
$$1 + \cos x = 2 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\ ,$$
puis
$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\cos x} &= \sqrt{2 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)}\\
&= \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} + \circ(x^2)}\\
&= \sqrt{2}\left(1 - \frac{x^2}{8}\right) + \circ(x^2)\ .
\end{aligned}$$
D'autre part
$$3 - \cos^2 x = 2 + \sin^2 x = 2 + x^2 + \circ(x^2)\ ,$$
donc
$$\begin{aligned}
\sqrt{3 - \cos^2 x} &= \sqrt{2 + x^2 + \circ(x^2)}\\
&= \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)}\\
&= \sqrt{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) + \circ(x^2)\ .
\end{aligned}$$
Alors
$$\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{3 - \cos^2 x} = -\frac{3}{8}\sqrt{2}x^2 + \circ(x^2)\ ,$$
et finalement
$$\lim_{x\to\pi/2} f(x) = -\frac{3}{8}\sqrt{2}\ .$$

14) a) Lorsque x tend vers $+\infty$, la quantité e^{2x} est prépondérante et on la met en facteur à l'intérieur du logartithme. On a alors

$$y = \ln[e^{2x}(1 + 3e^{-5x} + e^{-2x})] = 2x + \ln(1 + 3e^{-5x} + e^{-2x}) \ .$$

Comme $\ln(1 + 3e^{-5x} + e^{-2x})$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$ on en déduit que la courbe admet une asymptote d'équation $y = 2x$. De plus

$$y - 2x = \ln(1 + 3e^{-5x} + e^{-2x}) \ ,$$

est positif, car $1 + 3e^{-5x} + e^{-2x} \geq 1$. Donc la courbe est au-dessus de l'asymptote

Lorsque x tend vers $-\infty$, la quantité $3e^{-3x}$ est prépondérante et on la met en facteur à l'intérieur du logartithme. On a alors

$$y = \ln\left[3e^{-3x}\left(1 + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{5x}\right)\right] = -3x + \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{5x}\right) \ .$$

Comme $\ln\left(1 + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{5x}\right)$ tend vers zéro lorsque x tend vers $-\infty$ on en déduit que la courbe admet une asymptote d'équation $y = -3x + \ln 3$. De plus

$$y + 3x - \ln 3 = \ln\left(1 + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{5x}\right) \ ,$$

est positif. Donc la courbe est au-dessus de l'asymptote

b) En effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur, on obtient

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 1 = (x^3 + 2x^2 + 1)(x - 4) + 10x^2 - x + 5 \ ,$$

d'où l'on déduit

$$y = x - 4 + \frac{10x^2 - x + 5}{x^3 + 2x^2 + 1} \ .$$

Comme la fraction tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini, la courbe admet comme asymptote la droite d'équation $y = x - 4$. Par ailleurs, lorsque x tend vers l'infini,

$$y - x + 4 = \frac{10x^2 - x + 5}{x^3 + 2x^2 + 1}$$

est du signe du rapport des termes de plus haut degré $10/x$. Donc positif à $+\infty$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote, et négatif à $-\infty$ et la courbe est au-dessous de l'asymptote.

c) On a

$$y = x^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) \ ,$$

et en utilisant la quantité conjuguée, on obtient

$$y = \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \ .$$

Donc

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}\ ,$$

tend vers 1/2 à l'infini. Alors, en réduisant au même dénominateur, puis en prenant la quantité conjuguée du numérateur,

$$y - \frac{x}{2} = \frac{x\left(1-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)}{2\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)} = \frac{-1}{2\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)^2}\ ,$$

et cette quantité tend vers $-1/8$. La courbe admet donc une asymptote d'équation $y = x/2 - 1/8$. Alors

$$\begin{aligned}
y - \frac{x}{2} + \frac{1}{8} &= \frac{-1}{2\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)^2} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{-4 + \left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)^2}{8\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)^2} \\
&= \frac{\left(3+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-1\right)}{8\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)^2} \\
&= \frac{3+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{8x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)^3}\ .
\end{aligned}$$

Cette quantité est du signe de x. Donc la courbe est au-dessus de son asymptote à $+\infty$ et en dessous à $-\infty$.

15) a) En mettant x^2 en facteur sous la racine, il vient

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{1/x}} = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}\,e^{1/x}}\ .$$

Posons $h = 1/x$, et faisons un *d.l.* de

$$\frac{f(x)}{|x|} = |h| f\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{1+2h}\,e^h\ .$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+2h}\,e^h &= \left(1+h-\frac{1}{8}(2h)^2\right)\left(1+h+\frac{h^2}{2}\right) + \circ(h^2) \\
&= 1 + 2h + h^2 + \circ(h^2)\ .
\end{aligned}$$

Donc, si x est positif

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \ ,$$

et si x est négatif

$$f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \ .$$

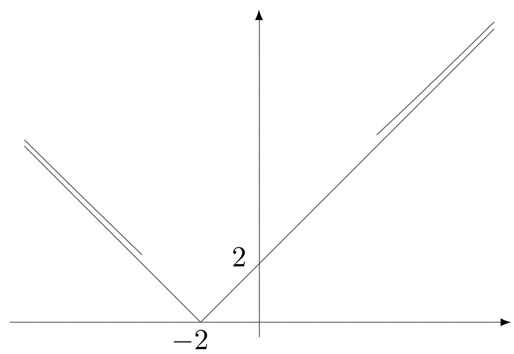
La courbe admet la droite d'équation $y = x + 2$, comme asymptote à $+\infty$ et se trouve au-dessus de l'asymptote car

$$f(x) - (x+2) = \frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$$

est du signe de $1/x$ donc positif.
Elle admet la droite d'équation $y = -x - 2$, comme asymptote à $-\infty$ et se trouve également au-dessus de l'asymptote car

$$f(x) + (x+2) = -\frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \sim -\frac{1}{x}$$

est du signe de $-1/x$ donc encore positif.



.

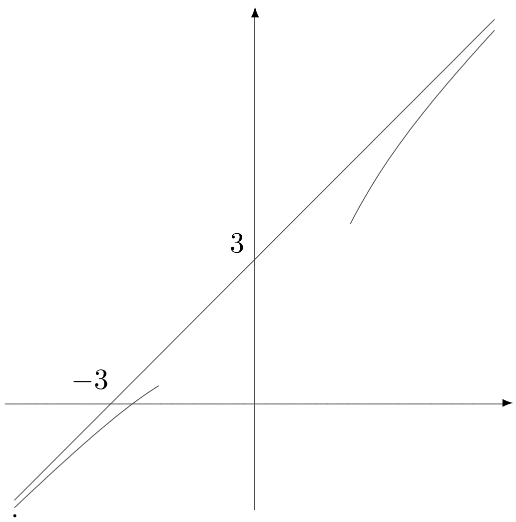
b) Posons $h = 1/x$. On a alors

$$\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1 + 2h - h^2 + h^3}{1 - h + 2h^2} \ .$$

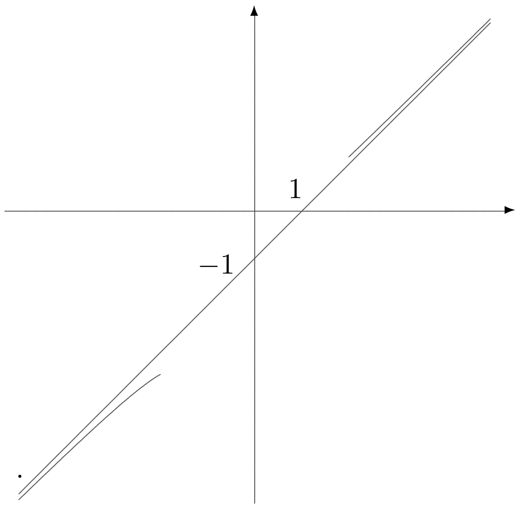
On cherche le *d.l.* d'ordre 3 en effectuant la division suivant les puissances croissantes.

$$\begin{array}{rrrr|llll}
1 & +2h & -h^2 & +h^3 & 1 & -h & +2h^2 & \\ \cline{5-8}
-1 & +h & -2h^2 & & 1 & +3h & & -5h^3 \\ \cline{1-4}
 & 3h & -3h^2 & +h^3 & & & & \\
 & -3h & +3h^2 & -6h^3 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & & -5h^3 & & & & \\
 & & & 5h^3 & & & & \\ \cline{4-4}
 & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Donc
$$f(x) = x + 3 - \frac{5}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right) \ .$$
La courbe admet à $\pm\infty$ l'asymptote d'équation $y = x + 3$. La différence
$$f(x) - (x+3) = -\frac{5}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim -\frac{5}{x^2} \ ,$$
est du signe de $-5/x^2$. La courbe est en dessous de son asymptote à $\pm\infty$.



c) Posons $h = 1/x$. On a alors
$$\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} \ .$$
On effectue un *d.l.* à l'ordre 2.
$$\frac{1-h}{1+h} = (1-h)(1-h+h^2+\circ(h^2)) = 1 - 2h + 2h^2 + \circ(h^2) \ .$$
Alors
$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-h}{1+h}} &= (1-2h+2h^2+\circ(h^2))^{1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(-2h+2h^2) - \frac{1}{8}(-2h+2h^2)^2 + \circ(h^2) \\ &= 1 - h + \frac{h^2}{2} + \circ(h^2) \ .\end{aligned}$$
On a donc
$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \ .$$
La courbe admet à $\pm\infty$ l'asymptote d'équation $y = x - 1$. La différence
$$f(x) - (x-1) = \frac{1}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{2x} \ ,$$
est du signe de $1/2x$. La courbe est en dessous de son asymptote à $-\infty$, et au-dessus à $+\infty$.



d) Lorsque x tend vers $+\infty$ le terme prépondérant à l'intérieur du logarithme est e^{2x}. On le met en facteur. Alors

$$f(x) = \ln[e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x} + 3e^{-5x})] = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x} + 3e^{-5x}) \ .$$

Posons alors $e^{-x} = h$, cette quantité tend vers zéro. On peut effectuer un *d.l.* à l'ordre 1 en zéro de

$$\ln(1 - h + h^2 + 3h^5) = \ln(1 - h + \circ(h)) \ .$$

On obtient

$$\ln(1 - h + h^2 + 3h^5) = -h + \circ(h) \ ,$$

donc

$$f(x) = 2x - e^{-x} + \circ(e^{-x}) \ .$$

La courbe admet comme asymptote la droite d'équation $y = 2x$. Et la différence

$$f(x) - 2x = -e^{-x} + \circ(e^{-x}) \sim -e^{-x} \ ,$$

est du signe de $-e^{-x}$. La courbe est en dessous de son asymptote à $+\infty$.

Lorsque x tend vers $-\infty$ le terme prépondérant à l'intérieur du logarithme est $3e^{-3x}$. On le met en facteur. Alors

$$f(x) = \ln\left[3e^{-3x}\left(1 + \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{4x} + \frac{1}{3}e^{5x}\right)\right] = -3x + \ln 3 + \left(1 + \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{4x} + \frac{1}{3}e^{5x}\right) \ .$$

Posons alors $e^{x} = h$, cette quantité tend vers zéro. On peut effectuer un *d.l.* à l'ordre 3 en zéro de

$$\ln\left(1 + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{3} + \frac{h^5}{3}\right) = \ln\left(1 + \frac{h^3}{3} + \circ(h^3)\right) \ .$$

On obtient

$$\ln\left(1 + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{3} + \frac{h^5}{3}\right) = \frac{h^3}{3} + \circ(h^3) \ ,$$

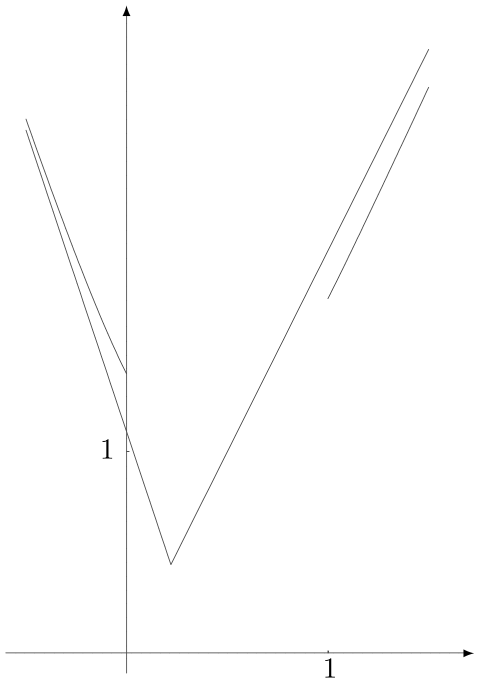
donc

$$f(x) = -3x + \ln 3 + \frac{1}{3}e^{3x} + \circ(e^{3x}) \ .$$

La courbe admet comme asymptote la droite d'équation $y = -3x + \ln 3$. Et la différence

$$f(x) - (-3x + \ln 3) = \frac{1}{3}e^{3x} + \circ(e^{3x}) \sim \frac{1}{3}e^{3x} \ ,$$

est du signe de $e^{3x}/3$. La courbe est au-dessus de son asymptote à $-\infty$.



.

16) a) Comme on a $\ln(1+u) = u + \circ(u)$, il faudra commencer le calcul à l'ordre 3 pour obtenir un résultat final à l'ordre 2.
En partant du développement en zéro

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \circ(u^3) \ ,$$

on a

$$\ln(1+2u) = 2u - 2u^2 + \frac{8u^3}{3} + \circ(u^3) \ ,$$

donc

$$\frac{\ln(1+2u)}{\ln(1+u)} = \frac{2 - 2u + \dfrac{8u^2}{3} + \circ(u^2)}{1 - \dfrac{u}{2} + \dfrac{u^2}{3} + \circ(u^2)} \ .$$

On effectue alors la division suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{rrr|lll}
2 & -2u & +8u^2/3 & 1 & -u/2 & +u^2/3 \\ \cline{4-6}
-2 & +u & -2u^2/3 & 2 & -u & +3u^2/2 \\ \cline{1-3}
 & -u & +2u^2 & & & \\
 & u & -u^2/2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 3u^2/2 & & & \\
 & & -3u^2/2 & & & \\ \cline{3-3}
 & & 0 & & &
\end{array}$$

Donc

$$\frac{\ln(1+2u)}{\ln(1+u)} = 2 - u + \frac{3u^2}{2} + \circ(u^2)\ .$$

Alors

$$\begin{aligned} f(u) &= \ln\left(2 - u + \frac{3u^2}{2} + \circ(u^2)\right) \\ &= \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{4} + \circ(u^2)\right) \\ &= \ln 2 + \left(-\frac{u}{2} + \frac{3u^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{u}{2} + \frac{3u^2}{4}\right)^2 + \circ(u^2) \\ &= \ln 2 - \frac{u}{2} + \frac{5u^2}{8} + \circ(u^2)\ . \end{aligned}$$

b) On a

$$f(x) = x \ln \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = xg\left(\frac{1}{x}\right)\ .$$

Quand x tend vers l'infini, $1/x$ tend vers zéro. On peut utiliser le *d.l.* de g.

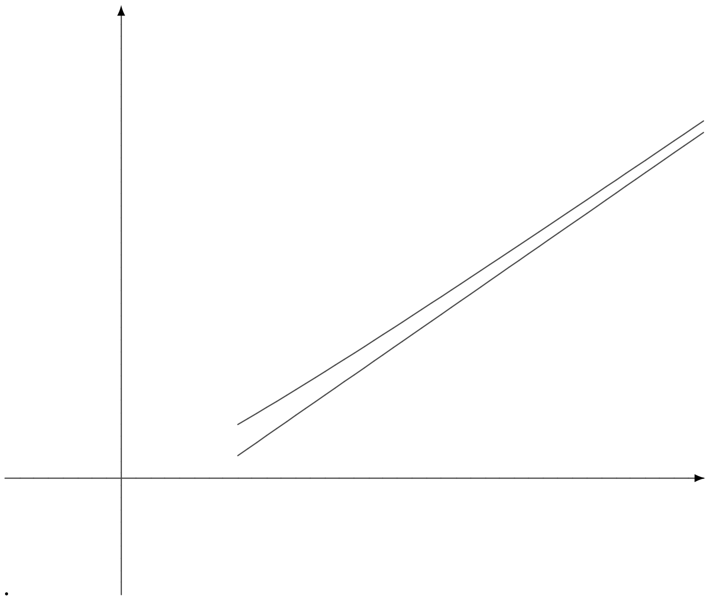
$$f(x) = x\left(\ln 2 - \frac{1}{2x} + \frac{5}{8x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{8x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)\ .$$

La courbe admet donc comme asymptote la droite d'équation

$$y = x \ln 2 - \frac{1}{2}\ .$$

La position de la courbe par rapport à cette asymptote est donnée par le signe de $5/(8x)$.

La courbe est donc au-dessus de l'asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.



17) a) En utilisant le *d.l.* de la fonction log, on a

$$g(x) = \ln(1+ax) - \ln(1+bx) = \sum_{k=1}^{n} (a^k - b^k)\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + \circ(x^n) \ .$$

b) Posons $u = 1/x$. 0n veut obtenir un résultat de la forme

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \gamma u^2 + \beta + \frac{\alpha}{u} + \circ(u^2) = \frac{\alpha + \beta u + \gamma u^3 + \circ(u^3)}{u} \ ,$$

cela signifie que l'on cherche un *d.l.* d'ordre 3 en zéro de $uf(1/u)$.

$$uf\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{3 + 6u - 10u^2}{u} \ln\frac{1+4u}{1+2u} \ .$$

Comme on divise par u, on part d'un *d.l.* d'ordre 4 du logarithme, ce qui, d'après la question a) donne

$$\ln\frac{1+4u}{1+2u} = 2u - 6u^2 + \frac{56}{3}u^3 - 60u^4 + \circ(u^4) \ ,$$

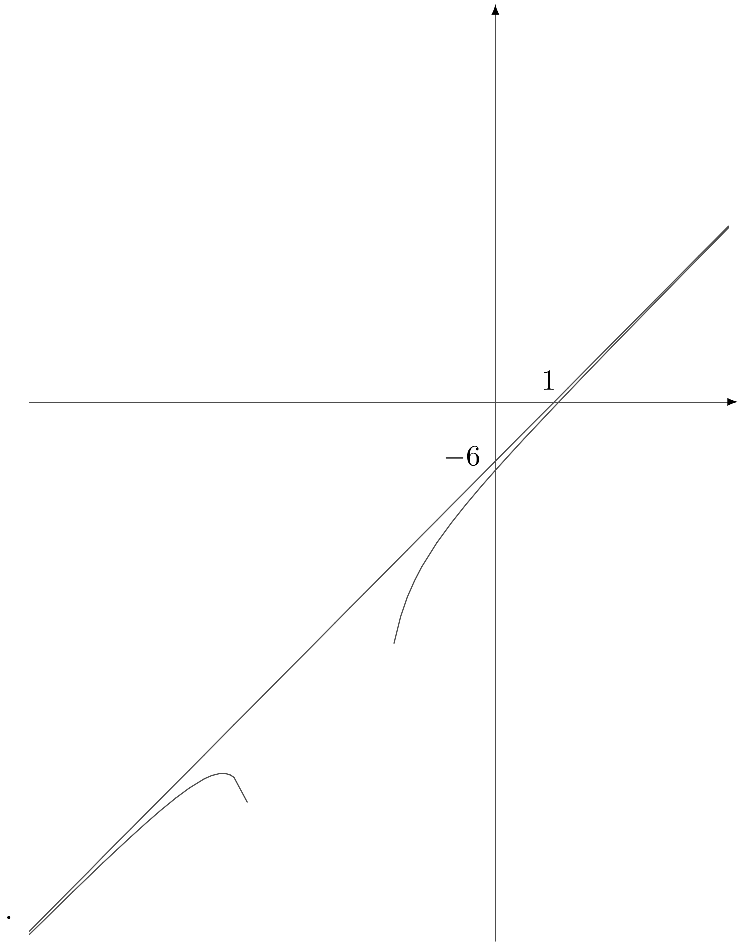
donc

$$uf\left(\frac{1}{u}\right) = (3 + 6u - 10u^2)\left(2 - 6u + \frac{56}{3}u^2 - 60u^3 + \circ(u^3)\right) = 6 - 6u - 8u^3 + \circ(u^3) \ .$$

On en déduit

$$f(x) = 6x - 6 - \frac{8}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right) \ .$$

La courbe admet donc comme asymptote la droite d'équation $y = 6x - 6$. Le terme $-8/x^2$ étant négatif, la courbe est en dessous de son asymptote à $\pm\infty$.



18) a) On pose $u = 1/x$. Alors
$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1-2u}{1+2u}}\ .$$
On a
$$\frac{1-2u}{1+2u} = (1-2u)(1-2u+4u^2+\circ(u^2)) = 1-4u+8u^2+\circ(u^2)\ ,$$
puis
$$\sqrt{\frac{1-2u}{1+2u}} = 1+\frac{1}{2}(-4u+8u^2)-\frac{1}{8}(-4u+8u^2)^2+\circ(u^2) = 1-2u+2u^2+\circ(u^2)\ ,$$
et donc finalement
$$f(x) = x-2+\frac{2}{x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\ .$$
La courbe admet comme asymptote la droite d'équation
$$y = x-2\ .$$
La différence $f(x)-x+2$ est du signe de $2/x$. La courbe est au-dessus de son asymptote à $+\infty$ et en dessous à $-\infty$.

b) Le domaine de définition de f est l'intervalle $]-\infty,\ -2\,[\,\cup\,[\,2,\ +\infty\,[$. La fonction est dérivable sur ł'intervalle $]-\infty,\ -2\,[\,\cup\,]\,2,\ +\infty\,[$ et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + x\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}}\frac{4}{(x+2)^2}\\
&= \left(\frac{x-2}{x+2} + \frac{2x}{(x+2)^2}\right)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\\
&= \frac{x^2+2x-4}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\ .
\end{aligned}$$

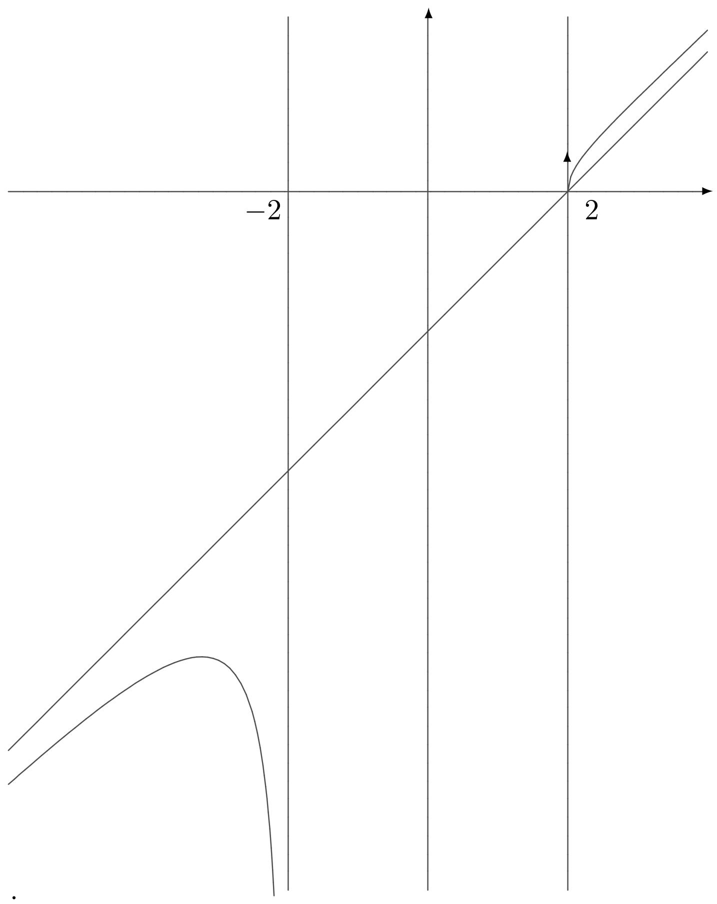
La dérivée est du signe de x^2+2x-4 dont les racines sont $-1\pm\sqrt{5}$. On a le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			∞	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	$-\infty$		0	$\nearrow$	$+\infty$

Calculons la valeur du maximum relatif $f(-1-\sqrt{5})=\alpha$. 0n a

$$\begin{aligned}
f(-1-\sqrt{5}) &= -(1+\sqrt{5})\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}}\\
&= -(1+\sqrt{5})\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}}{2}\\
&= -(1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}\ .
\end{aligned}$$

Ceci donne une valeur peu différente de -6 en remplaçant $\sqrt{5}$ par 2.



−2
2