ASSURANCE DISPONIBILITE DES EQUIPEMENTS

1 – INTRODUCTION

Nous avons évoqué dans le chapitre précédent la notion de Sûreté de fonctionnement (SdF). La norme européenne EN 133006 :2001 nous indique que c'est « l'ensemble des propriétés qui décrivent la disponibilité et les facteurs qui la conditionnent : fiabilité, maintenabilité et logistique de maintenance ». Cette définition européenne ramène la SdF au concept de disponibilité prévisionnelle en supprimant du concept SdF antérieur la notion de sécurité, celle-ci étant maintenant traitée à part (analyse du risque).

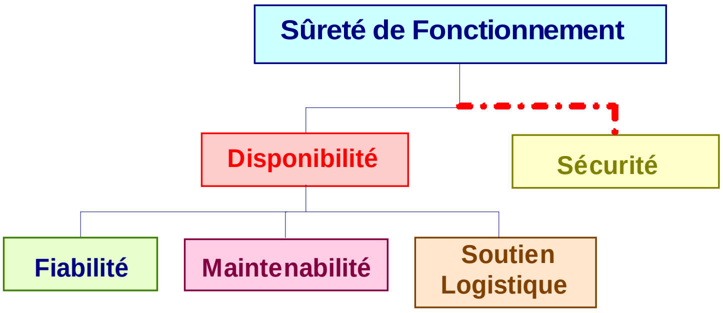

Figure 1 – Concept de Sûreté de Fonctionnement

L'homme moderne est entouré d'outils, de systèmes toujours plus sophistiqués dont il doit être sûr, s'il veut qu'ils concourent réellement à sa sécurité, son efficacité et son confort. Ainsi :

l'homme de tous les jours est fortement intéressé par :

- la fiabilité de son téléviseur ou de son réfrigérateur,
- la disponibilité de l'électricité pour qu'ils fonctionnent,
- mais aussi un SAV efficace dans le cas d'une défaillance ;

l'homme du secteur tertiaire accorde beaucoup d'importance à :

- la disponibilité de son système informatique,
- la fiabilité du chauffage ou de la climatisation en cas de situation météorologique extrême,
- à un service maintenance efficace en cas de défaillance de ces systèmes ;

l'homme du secteur secondaire, donc l'industriel, ne peut admettre de pertes de production, d'autant plus importantes que son process de fabrication est complexe ; il recherche donc :

- la fiabilité de ses systèmes contrôle-commande,
- la disponibilité de ses machines,
- la maintenabilité de l'outil de production,
- la sécurité des biens et des personnes.

La fiabilité, la maintenabilité, la disponibilité et la sécurité (F.M.D.S) constituent bien ce que l'on appelle « **sûreté de fonctionnement** ». C'est l'ensemble des propriétés qui décrivent la disponibilité et les facteurs qui la conditionnent : fiabilité, maintenabilité et logistique de maintenance. C'est aussi une notion générale sans caractère quantitatif, mais qui caractérise les performances d'un système. Comme nous l'avons dit dans le chapitre précédent, elle vise à maîtriser le risque par un maintien de la qualité sur l'ensemble du cycle de vie d'un matériel. L'approche la plus rationnelle et la plus exhaustive pour identifier les besoins de maintenance consiste à utiliser les moyens d'investigation de la sûreté de fonctionnement.

1.1 – Historique

Les techniques de sûreté de fonctionnement sont relativement récentes comparativement à l'évolution des techniques industrielles. Jusqu'en 1940, on pratiquait la théorie du maillon le plus faible : la solidité d'une chaîne n'est liée qu'à celui-ci. Cette théorie provoqua l'échec de la série initiale des missiles

V1 de Werner von Braun. Un mathématicien de son équipe bouleversa son raisonnement en annonçant que « si la probabilité de survie d'un élément est $1/x$, alors la probabilité de survie de n éléments identiques est $1/x^n$ ». C'était la fin de la théorie du maillon le plus faible. A partir de cette date, on commence alors à tenir compte de tous les risques, et la loi anecdotique de Murphy (1949) « **si un ennui a la moindre chance de se produire, il se produira** » ne fit que confirmer cette théorie :

- années 1950 : apparition du taux de défaillance, diagnostic de pannes,
- années 1960 : apparition de l'A.M.D.E.C. et de l'arbre des causes,
- années 1970 : normalisation des termes (fiabilité, maintenabilité, disponibilité), des calculs (MTBF, MTTF, etc.), prévision des risques,
- années 1980 : approche globale de la sûreté de fonctionnement

Plus que jamais, la notion de sûreté de fonctionnement ou F.M.D.S. s'impose aujourd'hui.

1.2 – Définitions générales

Nous pouvons donner tout de suite les définitions normalisées des quatre critères F.M.D.S. (norme NF EN 13306).

1. Fiabilité : c'est l'aptitude d'un bien à accomplir une fonction requise ou à satisfaire les besoins des utilisateurs, dans des conditions données et durant un intervalle de temps donné.

> On suppose bien sûr que le bien est en état d'accomplir la fonction requise au début de l'intervalle de temps donné. La fiabilité se traduit donc par l'aptitude d'un bien à avoir une faible fréquence de défaillance.

Note : le terme « fiabilité » est également utilisé pour désigner la valeur de la fiabilité et peut être défini comme une probabilité.

2. Maintenabilité : c'est l'aptitude d'un bien à être maintenu ou rétabli dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données avec des procédures et des moyens prescrits.

Note : le terme « maintenabilité » est également utilisé pour désigner la valeur de la maintenabilité.

3. Disponibilité : c'est l'aptitude d'un bien à être en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données et à un instant donné ou durant un intervalle de temps donné, en supposant que la fourniture des moyens extérieurs nécessaires soit assurée.

> Cette aptitude est fonction d'une combinaison de la fiabilité, de la maintenabilité associée à la logistique de maintenance du bien. Elle exprime la probabilité pour que le système accomplisse sa fonction, donc qu'il soit exempté de fautes, à l'instant t, sachant qu'il a pu en receler auparavant.

Note : Par moyens extérieurs, on entend moyens de maintenance. Les moyens extérieurs nécessaires, autres que la logistique de maintenance, n'affectent pas la disponibilité du bien

4. Sécurité : elle a pour but d'obtenir un système sûr de fonctionnement, c'est à dire ne risquant pas d'occasionner la perte ou des blessures de personnes, des dommages ou des pertes d'équipement, que le système soit en état de fonctionnement normal, dégradé ou en état de non fonctionnement.

Le concept de sécurité est en conflit avec celui de disponibilité. En effet, si on veut de la sécurité, on aura tendance à s'entourer de protection, et à se replier dans une situation de sécurité chaque fois que l'on aura un doute sur le bon fonctionnement, au détriment de la disponibilité. Il existe des solutions de redondance qui assurent la sécurité, d'autres qui assurent de la disponibilité. Les solutions qui assurent les deux sont, bien sûr, plus onéreuses.

1.3 – Soutien logistique maintenance

Par définition, la logistique est le processus stratégique par lequel l'entreprise organise et soutient son activité. Appliquée à la maintenance, cette définition peut être exprimée de la manière suivante : « c'est l'ensemble des moyens permettant aux techniciens de maintenance d'être efficace dans leurs actions ». La logistique de maintenance peut se décliner en quatre volets essentiels :

- matières et produits consommables,
- pièces et modules de rechange,
- outillage spécifique,
- moyens spéciaux.

1 – Matières et produits consommables

Ce sont les produits classiques d'atelier :

- quincaillerie (vis, écrous, rondelles, …),
- petite mécanique (joints, roulements, …),
- produits de nettoyage (solvants, dégrippants, ..),
- baguettes de soudure, pâtes d'étanchéité, …

S'y ajoutent :

- les matières premières nécessaires à la réfection des pièces ou pour les fabrications diverses (tubes, tôles, barres, etc..),
- les lubrifiants standardisés par le service.

2 – Pièces et modules de rechange

Ils peuvent être standards ou alors attachés à un équipement (pièces d'usure). La fonction Méthodes doit en avoir déterminé la nomenclature. La constitution d'un stock de pièces de rechange est fondamentale si on veut obtenir une bonne efficacité du service Maintenance.

3 – Les outillages spécifiques

Ce sont tous les outillages, autres que l'outillage classique que l'on trouve dans la caisse à outils d'un bon technicien. Ils sont souvent attachés à des matériels (préconisation du constructeur) ou alors définis comme « moyens communs » en atelier. Les appareils nécessaires aux CND en font partie.

4 – Les moyens spéciaux

Ce sont tous les moyens nécessaires à des opérations de maintenance sur des équipements lourds ou difficiles d'accès (moyens de levage, échafaudage, etc..).

Il est clair que la logistique de soutien va permettre d'optimiser les activités de maintenance (gain de temps, d'énergie, réduction des coûts) et surtout assurer la flexibilité du service Maintenance. Parmi ces quatre volets, un doit faire l'objet de beaucoup de soins : il s'agit du volet n°2 concernant les pièces et modules de rechange. Une erreur dans l'approvisionnement d'une pièce critique et c'est la catastrophe assurée : arrêt de la ligne de production pendant au moins 24 heures, délais de livraison obligent ! Nous allons donc essayer dans la suite de ce chapitre de voir comment gérer de manière rationnelle un stock maintenance.

Aujourd'hui, les entreprises cherchent à minimiser le plus possible leurs stocks afin de réduire les coûts (voir les cinq zéros « olympiques : 0 stock, 0 délai, etc..). Mais dans certaines situations, et c'est le cas de la maintenance, ceux-ci sont indispensables. Gérer un stock maintenance n'est pas toujours une chose simple, surtout lorsque les équipements de l'entreprise sont hétérogènes : il est alors difficile de standardiser les pièces de rechange.

2 – RAPPELS MATHEMATIQUES

2.1 – Notions de probabilité

La notion de probabilité d'apparition d'un événement E peut être introduite sous deux formes.

1. Soit on veut s'en servir pour désigner un ***degré de croyance*** et on écrit que :

$$\Pr(E) = \frac{\text{nombre de cas favorarables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Par exemple, E est l'événement « un équipement ne tombe pas en panne dans l'année ». Pr(E) = 0,9 signifie dire qu'on a 9 chances sur 10 pour que l'équipement ne tombe pas en panne dans l'année. C'est la **probabilité vraie** de l'événement E, qu'il est toujours difficile d'obtenir.

2. Soit on considère la probabilité comme la valeur limite d'une fréquence. Elle s'obtient alors de **manière expérimentale** par :

$$\Pr(E) = \lim_{n\to\infty} f(E)$$

où n est le nombre d'expériences et f la fréquence d'apparition de l'événement E ; donc, plus le nombre d'expériences est important, plus cette fréquence se rapproche de la probabilité vraie d'avoir E.

Dans les deux cas de figure, on a $\underline{\underline{0 \leq \Pr(E) \leq 1}}$.

Propriétés

- Soit P(E) la probabilité de voir se réaliser l'évènement E, dans ces conditions :

  probabilité qu'un événement se produise + probabilité qu'il ne se produise pas = 1

  qu'on écrit encore sous la forme **P(E) + P(non E) = 1**.
- *Loi d'addition* : la probabilité pour qu'un événement E se produise de différentes manières est égale à la somme des probabilités de le voir se produire de chacune des manières possibles.
- Si A et B sont deux évènements indépendants, alors :
  - la probabilité pour que ces deux événements se produisent simultanément ou successivement est égale au produit des probabilités pour que chacun d'eux se produise individuellement **P(A et B) = P(A).P(B)**
  - la probabilité pour que l'un se produise plutôt que l'autre est égale à la somme des probabilités de le voir se produire moins la probabilité de les voir se produire simultanément **P(A ou B) = P(A) + P(B) – P(A).P(B)**

2.2 – Variables aléatoires

Une variable aléatoire (V.A.) X est une variable telle, qu'à chaque valeur x_i de X, on puisse associer une probabilité. Par exemple :

- durée d'intervention pour une même défaillance,
- intervalle de temps entre deux défaillances,
- diamètre d'usinage d'une pièce.

Une V.A. peut être discrète ou continue.

- *V.A. discrète* : nombre de machines tombant en panne avant 1000 heures de fonctionnement ;
- *V.A. continue* : intervalle de temps entre deux défaillances consécutives pour la même machine.

Attention à ne pas confondre la valeur x_i prise par la V.A. (c'est un résultat) et la probabilité p_i de ce résultat ; on écrit $p_i = \Pr\{X = x_i\}$.

2.3 – Loi de probabilité

La correspondance entre V.A. et probabilité s'appelle *loi de probabilité*. Comme la probabilité p_i est une fonction de la valeur prise par la variable aléatoire, on peut écrire que $\underline{p_i = f(x_i)}$.

2.31 – Loi de probabilité discontinue

Si la variable aléatoire X prend n valeurs distinctes x_i, la loi de probabilité est discontinue. On classe généralement ces valeurs par ordre croissant. Comme de plus, la valeur x_i peut se présenter plusieurs fois, on représente graphiquement la loi de probabilité par un histogramme (figure 7.2). On peut noter que les aires des rectangles constituant l'histogramme sont proportionnelles aux probabilités p_i, puisque tous les rectangles ont un côté égal.

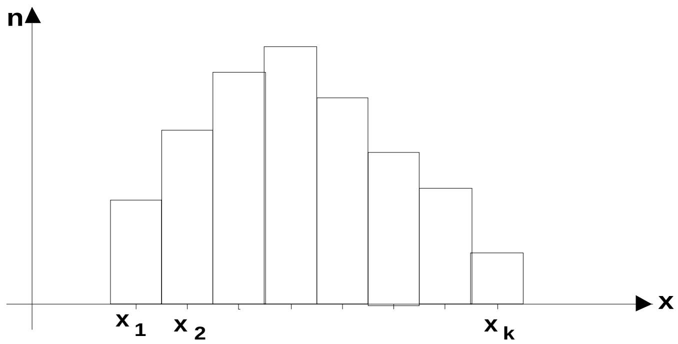

Figure 2 – Représentation graphique d'une loi de probabilité discontinue

Exemple : contrôle qualité en sortie d'une ligne de fabrication de pièces alésées, le contrôle consistant à mesurer le diamètre de l'alésage. Si l'on mesure ce diamètre au millimètre près, on obtiendra comme résultat toutes les valeurs s'étageant de mm en mm du plus petit au plus grand diamètre possible.

2.32 – Loi de probabilité continue

Reprenons l'exemple précédent, mais supposons que nous fassions des mesures au micron. Il est clair que les résultats possibles deviennent très nombreux, et la probabilité de chacun d'eux tend à devenir très faible, puisque la probabilité 1 se partage entre un plus grand nombre de résultats. La représentation graphique est composée de rectangles de très faible largeur (figure 7.3). On conçoit alors bien qu'on puisse utiliser la formulation d'une loi de probabilité continue comme une bonne approximation dans le cas où les résultats seraient très nombreux. C'est ce que l'on obtient en faisant tendre la largeur des rectangles vers 0. En sûreté de fonctionnement, on travaillera sur des V.A. continues, et donc sur des lois de probabilité continues.

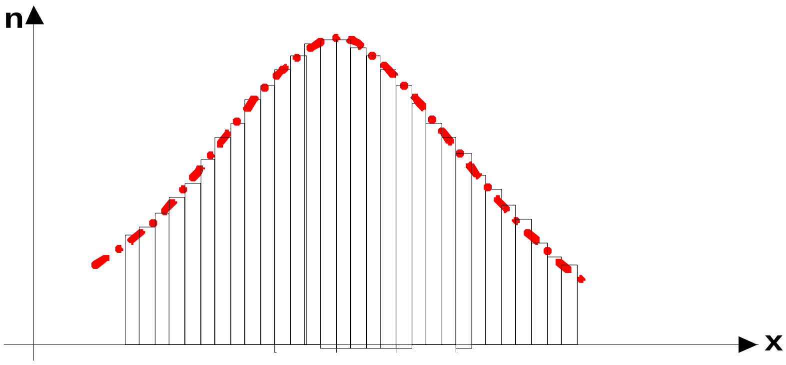

Figure 3 – Cas d'un très grand nombre de résultats

2.4 – Fonction de répartition

Jusqu'à présent, on a considéré uniquement que des résultats du type $X = x_i$. Les x_i étant dans l'ordre croissant, il est souvent intéressant de considérer un résultat du type $X \leq x_i$. Par exemple, on peut chercher à calculer la probabilité pour que 80% des équipements soient toujours en vie après 3000 heures de fonctionnement.

La probabilité du résultat $X \leq x_i$ s'obtient en cumulant les probabilités $\Pr\{X = x_k\}$ avec k ≤ i, soit $\Pr\{X \leq x_i\} = \sum_{k=1}^{i} p_k$. A toute valeur x_i que l'on se fixe, correspond une certaine probabilité cumulée, qui est donc une fonction des valeurs prises par la valeur aléatoire. Cette fonction est appelée **fonction de répartition** $F(x_i)$, et on écrit : $\underline{F(x_i) = \Pr\{X \leq x_i\}}$

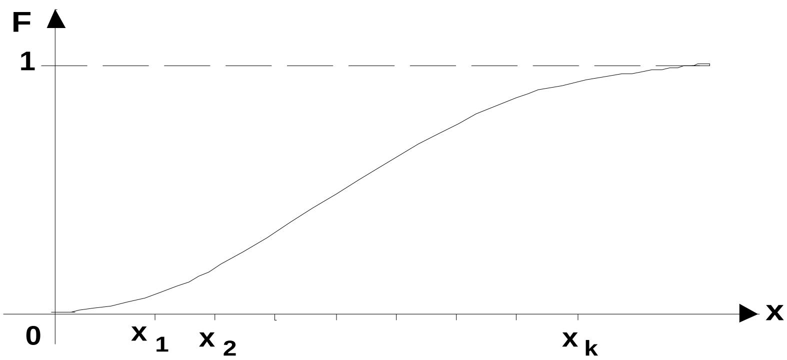

Figure 4 – Fonction de répartition

Comme toutes les probabilités p_i sont comprises entre 0 et 1 et que leur somme vaut 1, $F(x_i)$ est monotone croissante entre 0 et 1.

Une application intéressante de la fonction de répartition consiste à chercher la probabilité pour qu'un évènement se produise entre x_k et x_{k+1} : on voit que cette probabilité vaut $F(x_{k+1}) - F(x_k)$.

2.5 – Densité de probabilité

Soit une variable aléatoire X pouvant prendre des valeurs continues entre a et b. L'histogramme de la loi de probabilité correspondante est une courbe dont l'équation est de la forme y = f(x). D'après le paragraphe précédent, on voit que F(x) est l'intégrale de f(x) à partir de l'origine a :

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(x).dx$$

Donc f(x) est la dérivée de F(x) : on l'appelle **densité de probabilité** par analogie avec la notion de densité en physique. En effet, on voit sans difficulté que, si l'on considère un intervalle très petit dx à partir de la valeur x, la probabilité pour qu'un résultat appartienne à ce segment est f(x).dx (définition de la dérivée). On écrira donc que :

$$\Pr(x < X \leq x + dx) = f(x)dx \iff f(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{\Pr(x < X \leq x + dx)}{dx}$$

La densité de probabilité est notée f(x) car c'est aussi la fréquence d'apparition d'un événement dans un intervalle de temps dt et que f identifie souvent une fréquence.

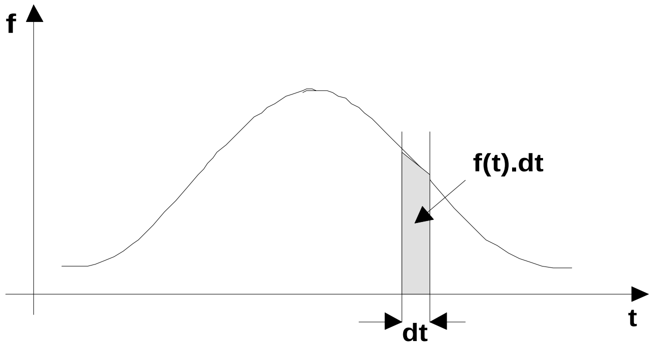

Figure 5 – Densité de probabilité

2.6 – Valeurs caractéristiques d'une loi de probabilité

L'illustration d'une loi de probabilité par un histogramme, bien que parlante, reste complexe et ne permet pas de la comparer avec une autre loi. On est donc conduit à rechercher des paramètres simples et peu nombreux pour la caractériser d'une façon schématique :

- l'un exprime la notion de résultat moyen et sert de référence pour situer un résultat quelconque ; on l'appelle « **espérance mathématique** »
- l'autre exprime la notion de dispersion autour de la moyenne et mesure donc l'étalement des résultats ; on l'appelle « **écart-type** ».

A – Espérance mathématique ou moyenne

L'espérance mathématique E(X) d'une loi de probabilité régissant une variable aléatoire X est la moyenne des résultats au sens du calcul des probabilités : on l'obtient en totalisant les résultats, chacun étant pondéré par sa probabilité. On peut donc l'apparenter au centre de gravité ou au barycentre. Dans le cas d'une loi de probabilité continue, on a . $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$.

L'espérance mathématique n'est pas forcément le résultat le plus probable, ni même un des résultats possibles, mais c'est la valeur autour de laquelle on a le « plus de chance » de trouver la V.A.

B – Variance - Ecart-type

La variance a une grande importance pratique, car elle donne une bonne idée de la dispersion d'une loi de probabilité. La variance est l'équivalent du moment d'inertie en mécanique. Elle s'exprime par $V(X) = E[x - E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2.f(x)dx$. La variance ayant la dimension d'un carré, on s'intéresse plutôt à sa racine, qu'on appelle écart-type et que l'on note σ.

On a $\sigma = \sqrt{V(X)}$. L'écart-type nous permettra de définir un intervalle de confiance. C'est l'étendue de l'intervalle à l'intérieur duquel on a une « grande chance » de trouver la V.A.

3 – FIABILITE D'UN EQUIPEMENT

3.1 – La fiabilité : définitions

A – Définition probabiliste

D'après le paragraphe 1.2, c'est « la probabilité pour un équipement d'accomplir une fonction requise, dans des conditions déterminées, pendant une période donnée ». En d'autres termes, *c'est la probabilité pour que l'équipement fonctionne dans des conditions données pendant un temps donné*. La fonction fiabilité est notée R (R = *Reliability*).

B – La fiabilité : pour qui ?

La terminologie de la fiabilité s'applique aussi bien à de grands nombres de dispositifs identiques, tels que des résistances ou des transistors, qu'à un dispositif unique (on suppose alors que le dispositif, même réparé, conserve ses propriétés initiales). En fait, on trouve deux sortes de dispositifs :

- les dispositifs *non réparables* (résistances, transistors, batteries, goupilles, joints, etc..) dont on effectuera le changement standard ;
- les dispositifs *réparables* qui feront l'objet d'une maintenance corrective.

C – Le temps

La distribution des temps jusqu'à défaillance ou des temps entre défaillances constitue la base des définitions des termes relatifs aux caractéristiques de fiabilité. Le temps s'exprime bien sûr en secondes, mais il peut aussi s'exprimer en « **unités d'usage** » (heures, distances, cycles ou toutes grandeurs appropriées : 1 heure, 3 mois, 1000 km, etc...). Le temps t associé à chaque dispositif ou équipement, définit une variable aléatoire T que l'on traitera selon les méthodes usuelles du calcul des probabilités :

a) pour les **dispositifs non réparables**, on relève le temps jusqu'à défaillance (figure 7.6) ;

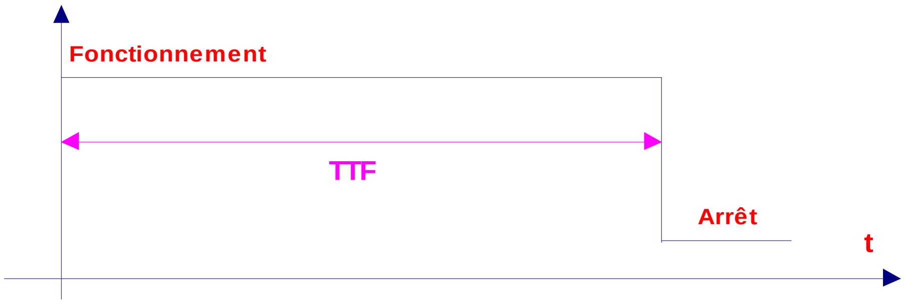

Figure 6 – Cas d'un système non réparable

Sur cette figure, **TTF** signifie **Time To Failure** (temps jusqu'à la défaillance irréversible).

b) Pour les **dispositifs réparables**, on relève le temps entre deux défaillances successives (figure 7.7).

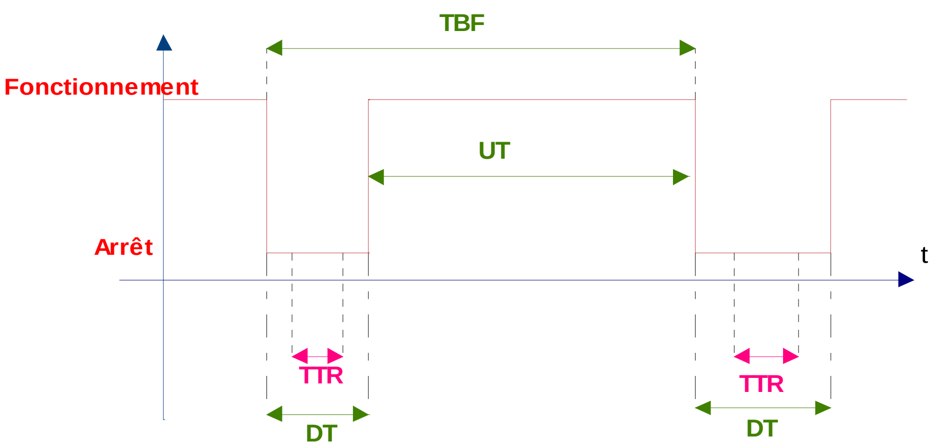

Figure 7 – Mise en évidence des temps sur un système réparable

c) Les abréviations utilisées sont les suivantes :

- **TBF** = **Time Between Failures** (temps s'écoulant entre deux défaillances),
- **UT** = **Up Time** (temps de fonctionnement après réparation ou **temps de disponibilité**),
- **DT** = **Down Time** (temps d'arrêt sur défaillance, y compris le temps de diagnostic de la panne, la réparation et le temps de remise en service, donc **temps d'indisponibilité**),
- **TTR** = **Time To Restoration** (temps de réparation),

Attention : TBF ne signifie pas « temps de bon fonctionnement » comme on a tendance trop souvent à le dire dans la langue française.

3.2 – Modélisation mathématique de la fiabilité

La fiabilité est donc une caractéristique d'un équipement qui s'exprime sous forme probabiliste. Son estimation peut s'effectuer de deux manières :

- à partir de résultats obtenus sur une période donnée, on l'extrapole sur une période intéressante pour l'utilisateur (notion de durée de vie) ;
- à partir de résultats obtenus sur un échantillon d'équipements identiques, on l'extrapole sur l'ensemble des équipements de même type dans lequel l'échantillon a été prélevé.

3.21 – Expression mathématique

Soit T la durée de vie sans avarie d'un équipement (TTF) ou l'intervalle entre deux défaillances (TBF). T est donc une variable aléatoire continue. On appelle **fiabilité** ou **fonction de survie** la probabilité pour que la défaillance intervienne à $T > t$, ce que l'on note par l'expression :

$$\boxed{R(t) = \Pr(T > t)}$$

On appelle d'autre part **fonction de défaillance** à l'instant t, la probabilité pour que la défaillance intervienne à $T < t$, ce que l'on note par l'expression :

$$\boxed{F(t) = \Pr(T < t)}$$

avec F = Failure. Comme P(E) + P(non E) = 1 alors R(t) + F(t) = 1, ou encore :

$$\boxed{R(t) = 1 - F(t)}$$

F(t) est encore appelée *fréquence relative cumulée des défaillances*.

Par exemple si R(100) = 0,92 et si le temps t est donné en heures, cela signifie que le matériel a 92 chances sur 100 de fonctionner pendant les 100 premières heures mais qu'il a aussi 8 chances sur 100 d'être défaillant avant 100 heures.

Enfin, la densité de probabilité de défaillance est donnée par l'expression $\boxed{f(t) = \dfrac{dF(t)}{dt}}$.

C'est la *fréquence d'apparition des défaillances* entre t et t+dt.

3.22 – Estimation statistique de la fiabilité

Les valeurs vraies des paramètres précédents ne sont pas faciles à calculer directement. Il faut bien voir que le maintenancier n'aura à sa disposition qu'un historique des défaillances d'où il pourra extraire la distribution des temps (TTF et TBF). Pour estimer R(t), F(t) et f(t), on va passer par une étude statistique des historiques.

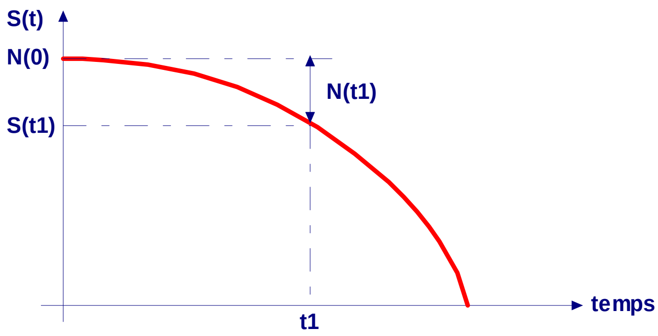

Figure 8 – Courbe de survie

Considérons N(0) équipements identiques, en bon état de marche, mis ensemble en service à l'instant t = 0 et travaillant dans les mêmes conditions. On étudie statistiquement les défaillances de ces matériels. A l'instant t, en fonction du nombre total des défaillances N(t) survenues, le nombre d'éléments survivants sera S(t) = N(0) – N(t). La représentation graphique de S(t) en fonction du temps est appelée « courbe de survie » (figure 7.8).

Si au lieu du nombre de survivants, on porte en ordonnées le rapport $\frac{S(t)}{N(0)}$, on obtient alors la même courbe partant cette fois du point d'ordonnée 1 et tendant vers 0 avec le temps. Or $\frac{S(t)}{N(0)}$ représente la **probabilité de survie** des équipements (au bout du temps t, on observe le pourcentage de survivants) ; c'est donc la fiabilité R(t) de l'équipement que l'on mesure.

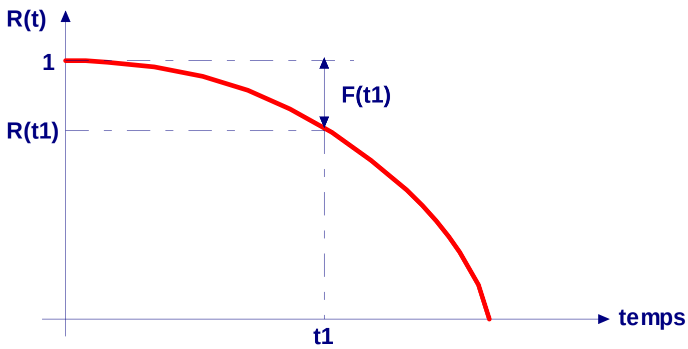

Figure 9 – Courbe de fiabilité

Effectuons alors une observation continue des défaillances et supposons aussi que le temps soit régulièrement distribué, de manière que chaque intervalle de temps soit égal à 1[1]. Nous pouvons remplir le tableau 7.10. Dans ce tableau :

1. $f(t) = \frac{S(t) - S(t+1)}{N(0)}$ représente la **proportion de défaillants** ou **fréquence relative des défaillances** entre les instants t et t+1 (c'est bien la notion de densité de probabilité qui est mesurée, donc leur loi de distribution) ;
2. $F(t) = 1 - R(t) = \sum_{i=0}^{t-1} f(i)$ représente la **fréquence relative cumulée des défaillances** ou loi de répartition sur un temps t (c'est bien la probabilité d'observer une défaillance à t ou avant t).
3. La dernière colonne fait apparaître un nouveau paramètre s'exprimant par $\lambda(t) = \frac{S(t) - S(t+1)}{S(t)}$. On constate qu'il définit le rapport du nombre d'équipements défaillants au cours d'une période au nombre de survivants au début de cette période. Le paramètre λ mesure donc le **taux de défaillance** entre deux instants : c'est un paramètre important, et nous y consacrerons tout un paragraphe.

[1] L'unité de temps t est ici l'unité d'usage pour l'équipement considéré : 1 heure, 1 mois, 1000 heures, 5000km, etc..

Remarque :

- L'estimation de F(t) s'est effectuée dans cet exemple par le rapport $\frac{i}{N(0)}$ avec i = N(t) cumul des défaillants à la fin de l'intervalle de temps considéré ; c'est la méthode des **rangs bruts**. Elle n'est valable que si la taille de l'échantillon testé est suffisante, c'est à dire si elle est supérieure à 50.
- En fait, quand l'échantillon est inférieur à 50, on prend $\frac{i}{N(0)+1}$; c'est la méthode des **rangs moyens**.
- Enfin, quand l'effectif de l'échantillon est inférieur à 20, on prend $\frac{i-0{,}3}{N(0)+0{,}4}$; c'est la méthode des **rangs médians**.

Date ou période t	Survivants S(t)	Probabilité de survie	Fréquence de défaillance entre t–1 et t	Fonction de défaillance F(t)	Taux de défaillance entre t–1 et t
t = 0	S(0)	$R(0)=\frac{S(0)}{N(0)}=1$		$F(0)=1-R(0)=0$	
$0<t<1$			$f(0)=\frac{N(0)-S(1)}{N(0)}$		$\lambda(0)=\frac{N(0)-S(1)}{N(0)}$
t = 1	S(1)	$R(1)=\frac{S(1)}{N(0)}$		$F(1)=1-R(1)=f(0)$	
$1<t<2$			$f(1)=\frac{S(1)-S(2)}{N(0)}$		$\lambda(1)=\frac{S(1)-S(2)}{S(1)}$
t = 2	S(2)	$R(2)=\frac{S(2)}{N(0)}$		$F(2)=1-R(2)$ $=f(0)+f(1)$	
$2<t<3$			$f(2)=\frac{S(2)-S(3)}{N(0)}$		$\lambda(2)=\frac{S(2)-S(3)}{S(2)}$
t = 3	S(3)	$R(3)=\frac{S(3)}{N(0)}$		$F(3)=1-R(3)$ $=f(0)+f(1)+f(2)$	
I < t < i+1			$f(i)=\frac{S(i)-S(i+1)}{N(0)}$		$\lambda(i)=\frac{S(i)-S(i+1)}{S(i)}$
t = i+1	S(i+1)	$R(i+1)=\frac{S(i+1)}{N(0)}$		$F(i+1)=1-R(i+1)$ $=\sum_{k=0}^{i}f(k)$	

Figure 10 – Etude statistique des défaillances

3.23 – Différentes formes des courbes de fiabilité

La figure 7.11 donne les formes générales des courbes de fiabilité.

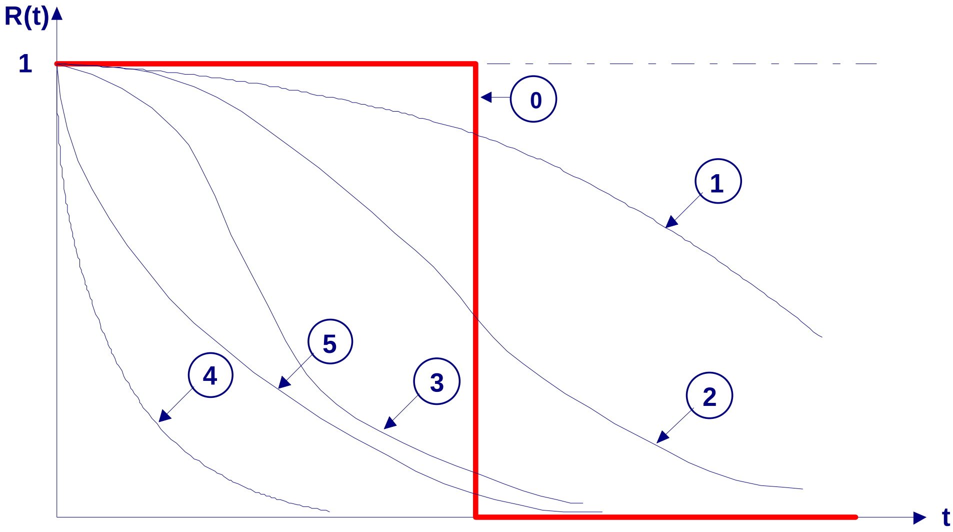

Figure 11 –Différentes formes des courbes de fiabilité

Courbe 0 : rectangle parfait. Cette courbe représenterait le cas d'une dégradation par usure ou par vieillissement parfait, ce qui ne se trouve pas dans la réalité.

Courbe 1 à 3 : elles représentent des processus de défaillance dans lesquels prédominent le vieillissement et/ou l'usure. La distribution des durées de défaillances est alors une distribution normale avec un écart type plus ou moins grand. On rencontre ce type de distribution pour les garnitures de freins, les ampoules électriques, les cisailles de découpage, etc.. On le rencontre également en fin de vie des composants électriques et électromécaniques, lorsque le phénomène de vieillissement devient prépondérant.

Courbe 4 : elle représente les processus de défaillances dans la période de jeunesse des équipements avec un grand nombre de défaillances (mise au point, déverminage, rodage).

Courbe 5 : elle est rencontrée dans tous les autres cas. C'est une courbe du type exponentiel résultant de l'apparition des défaillances suivant un processus poissonnien, c'est-à-dire avec des causes aléatoires indépendantes entre elles et indépendantes du temps. Ce type de courbe se rencontre très fréquemment pendant la seconde phase d'existence d'un équipement (période de vie utile, dite de « maturité ».

3. 24 – Taux de défaillance

Le taux de défaillance est une caractéristique de fiabilité couramment utilisée dans l'industrie, car il caractérise la vitesse de variation de la fiabilité au cours du temps.

A – Expression théorique

Considérons maintenant N(0) équipements identiques à l'instant t = 0. A chaque instant t, on peut relever le nombre d'équipements survivants S(t). Dans ces conditions, le taux de défaillance moyen pendant un intervalle de temps dt, rapporté au nombre de survivants à l'instant t, s'écrit :

$$\boxed{\lambda = \frac{S(t) - S(t+dt)}{S(t).dt}}$$

B – Taux de défaillance instantané

Le taux moyen de défaillance peut encore s'écrire $\lambda = \dfrac{\dfrac{S(t)-S(t+dt)}{N(0).dt}}{\dfrac{S(t)}{N(0)}}$. Or, le rapport $\dfrac{S(t)}{N(0)}$ représente la fiabilité R(t) = 1 – F(t), donc :

$$\lambda = \frac{R(t) - R(t+dt)}{dt.R(t)} = \frac{1 - F(t) - 1 + F(t+dt)}{dt.R(t)} = \frac{F(t+dt) - F(t)}{dt.R(t)}$$

Si on suppose la fonction de défaillance F dérivable sur $[0,+\infty[$, alors :

$$\lim_{dt \to 0} \frac{F(t+dt) - F(t)}{dt.R(t)} = \frac{F'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

On appelle **taux de défaillance instantané** à l'instant t, le rapport :

$$\boxed{\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}}$$

C – Evolution du taux de défaillance dans le temps

De nombreuses observations ont montré que les matériels présentaient un taux de défaillance dont l'allure, en fonction du temps, est « une courbe en baignoire » (figure 7.12). Sur cette courbe, on repère trois zones.

1. **Zone 1** : c'est la période de jeunesse ou de défaillance précoce, période initiale d'un matériel pendant laquelle le taux instantané de défaillance décroît rapidement, jusqu'à un minimum. Les défaillances sont le plus souvent catalectiques. Cette période devrait, pour des matériels corrects, être éliminée par un rodage pour la mécanique ou par un pré-vieillissement (« déverminage ») pour des composants électroniques ; à noter que cette phase est plus lente pour un composant mécanique.

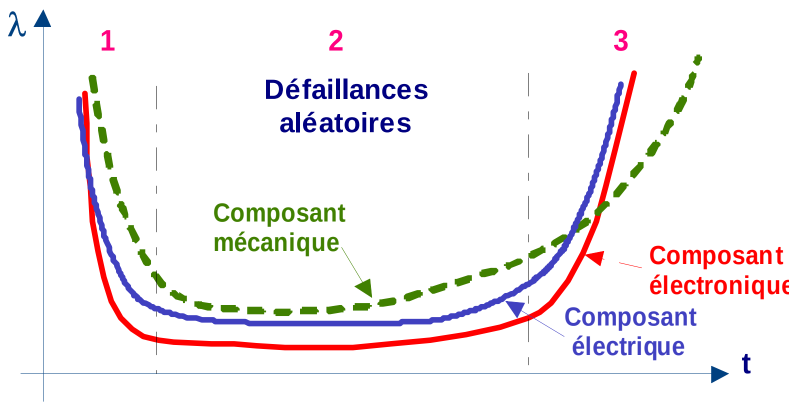

Figure 12 – Courbe en baignoire

2. **Zone 2** : c'est la période, dans la vie d'un matériel, pendant laquelle le taux instantané de défaillance est pratiquement constant pour le composant électronique, moins pour le composant mécanique ; elle peut être de durée plus ou moins importante (plus pour l'électronique que pour la mécanique). Les défaillances sont aléatoires et liées le plus souvent à la dérive des composants. On appelle aussi cette période « période de maturité » ; en maintenance, c'est la période où l'on met en place du préventif, même si le correctif reste nécessaire.
3. **Zone 3** : c'est la période de défaillance par vieillissement (ou période d'usure ou « fin de vie ») ; pendant cette période, le taux de défaillance croît rapidement. On peut éliminer cette période par des politiques appropriées de déclassement ou de remplacement systématique. La tendance est toutefois d'effectuer une maintenance conditionnelle, ce qui permet de prévoir les défaillances et d'exploiter le matériel au maximum de ses possibilités.

Aujourd'hui, certains fournisseurs d'équipements n'hésitent pas à « vieillir » ceux-ci avant de les vendre au client, de manière à éliminer les pannes de jeunesse ; c'est le cas des constructeurs automobiles, le client ne « rodant » plus le moteur de sa voiture comme cela se faisait encore il y a une vingtaine d'année. D'autre part, des équipements identiques ne travaillent pas obligatoirement de la même manière, et donc, la réalité des défaillances est tout autre (figure 7.13).

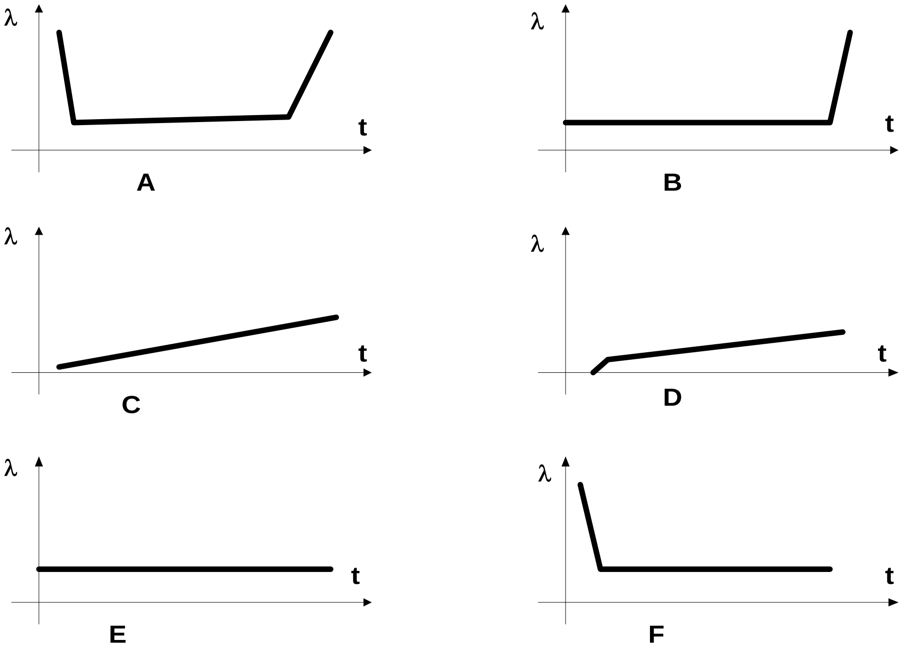

Figure 13 – Réalité des taux de défaillance

- En A, on retrouve la courbe en baignoire.
- En B, les pannes de jeunesse ont été éliminées, les défaillances n'apparaissent que lorsque l'équipement est âgé (cas des équipements mécaniques et électromécaniques simples).
- La courbe C indique qu'on ne sait pas dire à quel moment vont commencer les ennuis, puis on a un taux croissant lié à l'usure (exemple des vannes de pressurisation).
- La courbe D montre des systèmes sans défaut au départ (cas des moteurs électriques qui sont neufs au départ).
- La courbe E est typique des défaillances aléatoires ; la défaillance n'a aucun lien avec l'âge ; c'est le cas des équipements mécaniques et électromécaniques complexes ; le préventif n'a pas d'impact dans ce cas.
- Enfin la courbe F montre des systèmes souffrant de défaillances précoces, ce qui est le signe d'une mauvaise conception.

La connaissance de l'évolution du taux de défaillance doit aider à mettre en place une politique de maintenance. On parlera alors de MBF, c'est à dire « Maintenance Basée sur la Fiabilité » (en anglais RCM : « Reliability Centered Maintenance »). Nous donnerons deux exemples[2] significatifs.

Exemple 1 : on a changé une première fois un roulement à billes sur un équipement 3 ans après sa mise en service, une seconde fois 1 ans après le premier échange, enfin une troisième fois 5 ans après. Sa durée de vie moyenne est donc de 3 ans, mais on ne peut pas prédire à quel moment il va « lâcher » pour la quatrième fois.

Conclusion : les roulements suivent en pratique le modèle E et il est donc ridicule de pratiquer du préventif systématique !.. La solution passe par le conditionnel : on entend du bruit, on change le roulement ; encore faut-il avoir un signal qui nous prévienne suffisamment avant, d'où l'utilité de l'analyse vibratoire.

Exemple 2 : une ampoule électrique a également un taux de défaillance aléatoire, mais de plus, la défaillance est catalectique. On se retrouve dans le noir !.. Il est clair que le systématique et le conditionnel ne marchent pas dans ce cas. La solution passe par la mise en parallèle de 2 lampes (redondance).

Conclusion : il y a peu de chances que les deux lampes grillent en même temps, on ne sera donc jamais dans le noir. Par contre, on change les conséquences : le coût est plus élevé, tant en matériel qu'en énergie.

---

[2] Extraits de l'intervention d'Albert Van De Bor « Maintenance basée sur la fiabilité – Colloque des départements GIM – IUT de Valenciennes – 25 & 26 mai 2000

3.24 – Modèle mathématique de la fiabilité

Nous avons défini dans le paragraphe précédent, par passage à la limite, le taux de défaillance instantané tel que :

$$\lambda(t).dt = \frac{F(t+dt)-F(t)}{R(t)} = \frac{dF(t)}{1-F(t)}$$

Intégrons les deux membres de l'expression précédente, avec comme condition initiale F(0) = 0, donc R(0) = 1 :

$$\int_0^t \lambda(x).dx = \int_0^t \frac{dF(x)}{1-F(x)}.dx = \left[-\ln(1-F(x))\right]_0^t = -\ln\left[R(x)\right]_0^t = -\ln R(t) + \ln R(0)$$

Mais comme R(0) = 1, il vient $\ln R(t) = -\int_0^t \lambda(x).dx$ ou encore $\boxed{R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(x).dx}}$.

Dans ces conditions, si l'on connaît la loi d'évolution du taux de défaillance d'un équipement, on saura calculer sa fiabilité.

3.3 – Paramètres fiabilistes de type « moyenne »

Il existe d'autres indicateurs de fiabilité qui s'expriment par des moyennes de temps définis au paragraphe 3.1-C :

- TBF, TTF et UT pour des matériels en état de fonctionnement,
- TTR et DT pour des matériels hors état de fonctionnement.

Si l'on moyenne ces temps sur la durée de vie du matériel, on va obtenir, avec **M = Mean** (moyenne), les MTBF, MTTR, MUT, MDT et MTTF.

Parmi ces indicateurs, le MTBF a un très grand intérêt : c'est *l'espérance mathématique du temps de bon fonctionnement entre deux défaillances* ; son expression est donc :

$$MTBF = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t.dF(t)$$

En intégrant l'expression précédente par parties, on obtient finalement :

$$\boxed{MTBF = \int_0^{+\infty} R(t).dt}$$

Remarques :

- Le MTBF s'exprime le plus souvent en heures, mais on peut utiliser une autre unité d'usage.
- Une bonne approximation du MTBF est donnée par la formule $MTBF \cong \frac{\sum UT}{\text{Nombre de défaillances}}$ à condition que les DT soient très petits devant les UT.
- Le MTTF est la caractéristique de fiabilité d'un dispositif non réparable. On l'appelle encore « **durée de vie moyenne** ».

3.4 – Cas typiques de calcul de fiabilité

3.41 – Cas d'un taux de défaillance constant

Nous nous intéressons ici à la période où le taux de défaillance est constant (hors défauts de jeunesse et vieillissement). C'est le cas des composants électroniques. Le taux utilisé est souvent le taux moyen donné le plus souvent **en nombre de défaillances par heure**. Dans ces conditions, la loi de fiabilité qui en découle s'écrit $R(t) = e^{-\int_0^t \lambda.dt}$ soit :

$$\boxed{R(t) = e^{-\lambda t}}$$

Cela veut dire que **la fiabilité suit une loi exponentielle**. Il est alors possible de calculer la fiabilité d'un composant à tout moment de sa vie ainsi que son MTBF et l'écart-type. On a :

$$MTBF = \int_0^{+\infty} R(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}.dt \text{ soit } \underline{\underline{MTBF = \frac{1}{\lambda}}} \text{ avec } \underline{\underline{\sigma = \frac{1}{\lambda}}}.$$

Attention : ne pas confondre le MTBF avec la « durée de vie » d'un matériel. Dire qu'un matériel a un MTBF de1000h ne signifie pas qu'à t = 999h, ce matériel fonctionne et qu'à t = 1001h, le matériel est défaillant. Le MTBF représente une moyenne.

3.52 – Cas d'un taux de défaillance non constant

Contrairement à un composant électronique, un composant mécanique ne peut pas avoir un taux de défaillance constant, car le phénomène d'usure commence dés la mise en service. Supposons, par exemple, que le taux de défaillance évolue linéairement selon la loi $\lambda(t) = at + b$. On en déduit que la fiabilité s'écrit sous la forme $R(t) = e^{-\int_0^t (at+b)dt} = e^{-(\frac{at^2}{2}+bt)}$. Si l'on connaît les paramètres a et b, on n'aura aucun mal à calculer R. Par contre, le calcul du MTBF ne sera pas simple $MTBF = \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{at^2}{2}+bt)}.dt$.

Là encore, une méthode de calcul numérique, du type Simpson, sera nécessaire. En règle générale, il est plus facile de trouver directement la fonction de fiabilité en essayant divers modèles, puis en vérifiant leur validité par un test d'adéquation. Dans le cas de taux de défaillance croissant, ce qui est la réalité, on peut utiliser deux lois.

1. La première est la loi log-normale (fatigue ou usure mécanique) avec $R(t) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - m}{\sigma}\right)^2}$
2. La seconde est la loi de WEIBULL, modèle plus général avec :
   - $R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$ si $t > \gamma$
   - R(t) = 1 si $t \leq \gamma$

   Cette loi est la plus utilisée en maintenance (voir la méthode en annexe à ce chapitre).
3. Si les défaillances apparaissent en fin de vie (zone 3) et sont centrées sur une valeur moyenne, la fiabilité suit une loi normale, mais c'est un phénomène peu courant.

3.6 – Amélioration de la fiabilité

Lorsque le taux de défaillance est constant, il est facile de vérifier qu'une maintenance préventive n'améliore pas la fiabilité d'un composant. En effet, nous avons vu que la probabilité de réussite d'une mission de durée Δt, après un temps t de bon fonctionnement, s'exprime par :

$$\frac{R(t+\Delta t)}{R(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t}$$

Remplacer un composant à l'identique, c'est à dire de même taux de défaillance λ, c'est prendre le risque de le remplacer par un composant plus mauvais : à chaque instant, et quel que soit le temps, on a la même probabilité de défaillance. Donc, calculer la fiabilité d'un équipement, c'est bien, mais rechercher les causes c'est mieux. Un des aspects essentiels de l'activité des fiabilistes va être d'établir la répartition des causes de défaillances en fonction de leur fréquence d'apparition. Pour cela, on dispose d'outil comme le diagramme de Pareto.

Mais il y a plusieurs autres façons d'améliorer la fiabilité tout en allant dans le sens de la sécurité intrinsèque de l'équipement. On appelle *sécurité intrinsèque* la propriété d'un bien qui a été conçu de telle manière que ses défaillances n'entraînent pas de pannes graves. Ces techniques sont très utilisées là où les conséquences d'une défaillance sont telles, qu'elles sont inacceptables. C'est le cas de l'aéronautique ou du nucléaire. Le tableau suivant est caractéristique de la définition du risque dans l'industrie aéronautique[3].

Les notions de sécurité intrinsèque seront vues au paragraphe 6.

[3] D'après Michel Emery Conseil et formation

Probabilité	Conséquences			
	Catastrophique	Critique	Majeure	Mineure
Probable	**Inacceptable**	**Inacceptable**	**Inacceptable**	Acceptable
Rare	**Inacceptable**	**Inacceptable**	Acceptable	Acceptable
Extrêmement rare	**Inacceptable**	Acceptable	Acceptable	Acceptable
Extrêmement improbable	Acceptable	Acceptable	Acceptable	Acceptable

Figure 14 – Définition du risque dans l'industrie aéronautique

4 – MAINTENABILITE

4.1 – Caractéristique de la maintenabilité

Pour un matériel travaillant dans des conditions données d'utilisation, la maintenabilité est la probabilité pour qu'une opération de maintenance active, avec l'utilisation de procédures et moyens prescrits, puisse être effectuée dans un intervalle de temps donné $[0,t]$. La maintenabilité est notée M(t) et s'écrit :

$$\boxed{M(t) = \Pr[TTR < t]}$$

La variable aléatoire est ici le temps d'intervention de maintenance que nous avons défini sous le nom de TTR. Il se compose en règle générale des temps suivants :

- temps de vérification de la réalité de la défaillance (un défaut fugitif ou une fausse alarme est monnaie courante)
- temps de localisation,
- temps de diagnostic,
- temps d'accès à l'organe défaillant (dépose puis démontage),
- temps de dépannage ou de réparation,
- temps de remontage,
- temps de contrôle et d'essais finals.

En d'autres termes, la maintenabilité est la probabilité de remettre un équipement en état de fonctionner, en un temps donné, dans des conditions données, en retrouvant la fiabilité initiale.

La densité de probabilité du temps de réparation se note $g(t)$. On a donc $M(t) = \int_0^t g(t).dt$.

4.2 – Taux de réparation

C'est un paramètre similaire au taux de défaillance. Il est noté μ(t) et s'écrit :

$$\boxed{\mu(t) = \frac{g(t)}{1 - M(t)}}$$

Dans les études de disponibilité, il est souvent considéré comme constant. Dans ces conditions, nous pouvons écrire que $\mu[1 - M(t)] = g(t) = \frac{dM(t)}{dt}$, équation différentielle du premier ordre dont la solution est :

$$\boxed{M(t) = 1 - e^{-\mu t}}$$

La distribution des temps avant remise en service (réparation) suit donc une loi exponentielle.

4.3 – Temps moyen de réparation après défaillance

Noté MTTR, c'est l'espérance mathématique du TTR, donc :

$$MTTR = \int_{-\infty}^{+\infty} t.g(t).dt = \int_0^{\infty} [1 - M(t)]dt$$

Dans le cas où le taux de disponibilité est constant, on a tout de suite $MTTR = \int_0^\infty e^{-\mu t}.dt$, soit :

$$\boxed{MTTR = \frac{1}{\mu}}$$

4.4 – Temps moyen d'indisponibilité après défaillance

Le TTR n'est souvent qu'une partie du DT, en particulier lors d'une intervention corrective. En effet, il peut exister un temps plus ou moins long avant que la défaillance ne soit découverte. Le schéma 7.15 donne l'ensemble des temps constituant le temps d'indisponibilité après défaillance. Le TTR constitue le temps actif de maintenance, les autres constituant les « temps annexes » de maintenance. Il est évident que si l'intervention est programmée (par exemple dans le cas d'une défaillance qui n'entraîne pas l'indisponibilité de l'équipement), les temps de non-détection et d'appel maintenance n'existent plus.

Les temps annexes de maintenance corrective correspondent aux temps suivants :

- temps administratifs (saisie DI, émission OT, BT, rapport d'intervention),
- temps logistiques (attentes des ressources logistiques et humaines),
- temps techniques annexes (mise en sécurité de l'équipement),
- temps de préparation du travail (études, méthodes, ordonnancement).

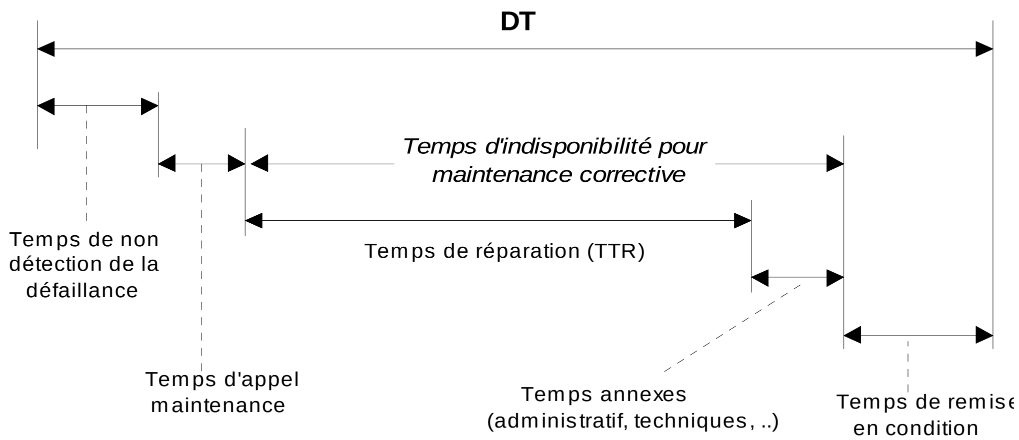

Figure 15 – Temps moyen d'indisponibilité

4.5 – Amélioration de la maintenabilité

La maintenabilité d'un équipement est une qualité fondamentale, qui n'est malheureusement pas toujours prise en compte par les constructeurs et à laquelle les clients (souvent des services différents de la maintenance) n'attachent pas l'attention désirable. L'amélioration de la maintenabilité passe par la diminution des temps explicités au début de ce paragraphe, à savoir :

- le temps de vérification de la réalité de la défaillance et de localisation,
- le temps de diagnostic,
- le temps de réparation puis le temps de contrôle et d'essais.

Les propositions fournies dans le tableau 7.16 permettent de diminuer notablement ces pannes.

Temps	Améliorations possibles
Vérification, localisation	• voyants, capteurs • appareils de mesure • supervision
Diagnostic	• documentation opérationnelle complète (plans mis à jour, notices d'entretien, etc..) • repérage et accessibilité des points de mesure • facilité de diagnostic : diagramme causes-

	effets, arbre de diagnostic, logigramme de dépannage, système expert
Réparation	• accessibilité meilleure, facilité de démontage • gammes de démontage-remontage • interchangeabilité des composants
Contrôles et essais	• dispositifs de contrôle incorporés dès la conception • procédures d'essais simplifiées • connaissance des limites de tolérance admissible des caractéristiques à mesurer
Gestion	• équipements homogènes et/ou standards • personnel bien formé • procédures d'intervention précises • outillage spécialisé et adapté
Fournisseurs	• choix du fournisseur d'après la qualité de son matériel et de son SAV • stabilité des fabrications • existence de stocks et/ou délais très courts pour obtenir une pièce de rechange

Figure 16 – Amélioration de la maintenabilité

5 – DISPONIBILITE

5.1 – Définition

La disponibilité d'un matériel est la probabilité d'un bon fonctionnement de celui-ci à l'instant t. En d'autres termes, un équipement est disponible si on peut s'en servir. Cette aptitude est fonction :

- de la fiabilité (diminution des arrêts),
- de la maintenabilité et de la maintenance (réduction des temps pour résoudre ces arrêts),
- de la qualité des moyens mis en oeuvre (soutien logistique),

et de la compatibilité de ces facteurs entre eux. Elle se note A(t) (A comme Availability) ou D(t) (D comme Disponibilité). On distinguera les disponibilités théoriques (instantanée et asymptotique) modélisées par des lois de probabilité, et les disponibilités opérationnelles utilisées en gestion de la maintenance, modélisées suivant les données saisies et l'objectif de gestion recherché. La figure 7.17[4] schématise les différentes formes de disponibilité et leur contexte.

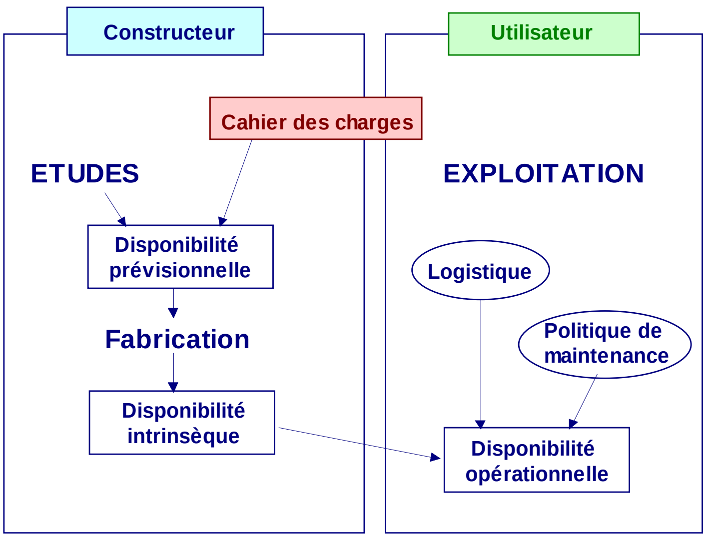

Figure 17 – Les différentes formes de disponibilité

[4] D'après François MONCHY in « La fonction Maintenance » - Masson – 2ème édition - 1996

5.2 – Les temps en maintenance

La disponibilité est liée au temps, mais plus encore **aux temps** que l'on définit en maintenance. Ces temps font partie du vocabulaire maintenance et sont parfaitement normalisés (norme X 60-020). La figure 7.18 indique les principaux temps utilisé en maintenance.

<table>
<tr><th colspan="8">Temps total ou temps d'ouverture</th></tr>
<tr><th colspan="6">Temps requis</th><th colspan="2" rowspan="2">Temps non requis</th></tr>
<tr><td colspan="2">Temps effectif de disponibilité</td><td colspan="4">Temps effectif d'indisponibilité</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Temps de fonctionnement (1)</td><td rowspan="2">Temps d'arrêt (2)</td><td colspan="2">Temps d'indisponibilité pour maintenance</td><td colspan="2">Temps d'indisponibilité pour incapacité</td><td rowspan="2">Temps potentiel de disponibilité (7)</td><td rowspan="2">Temps potentiel d'indisponibilité (8)</td></tr>
<tr><td>Corrective (3)</td><td>Préventive (4)</td><td>Contraintes d'exploitant (5)</td><td>Causes extérieures (6)</td></tr>
</table>

Figure18 – Les temps principaux en maintenance

Temps total ou temps d'ouverture : période de référence choisie pour l'analyse des temps.

Temps requis : période pendant laquelle l'utilisateur exige que l'équipement soit en état d'accomplir une fonction requise.

Temps effectif de disponibilité : partie du temps requis pendant laquelle le bien est apte à accomplir une fonction requise, la fourniture des moyens extérieurs étant assurée ; ce temps peut comporter des opérations de maintenance ne nécessitant pas l'indisponibilité du bien (maintenance de niveau 1). Ce temps se décompose en :

1. *temps de fonctionnement* où le matériel accomplit une fonction requise ;
2. *temps d'arrêt* où le matériel est non sollicité (on dit encore temps d'attente) ; l'exemple d'un groupe électrogène de secours est typique d'un matériel non sollicité ;

Temps effectif d'indisponibilité : partie du temps requis pendant laquelle le bien est inapte à accomplir une fonction requise pour une cause inhérente au bien ou externe à celui-ci. Ce temps se décompose en :

3. *temps de maintenance corrective*, c'est à dire le temps d'indisponibilité après défaillance (DT) ; il comprend : le temps de réparation ou TTR (diagnostic, réparation, remise en service), le temps de non-détection, le temps d'appel à la maintenance, le temps d'approvisionnement en outillage, le temps d'approvisionnement en pièces de rechange ;

4. *temps de maintenance préventive* (temps de préventif de niveaux 1 et 2, des inspections et/ou contrôles, des visites) ;

5. *temps d'incapacité par contrainte d'exploitation*, c'est à dire les temps liés aux contraintes de production (changement d'outil programmé, changement de fabrication, contrôle de produit fabriqué) ;

6. *temps d'incapacité pour causes extérieures* (manque d'énergie, manque de main d'œuvre, manque de pièces ou saturation en pièces, non-conformité de pièces en amont) ;

Temps non requis : partie du temps correspondant à un non-besoin de production (7), cette période permettant en particulier de ne pas créer de stock inutile et/ou à des travaux lourds de maintenance (niveau 5) souvent réalisés pendant les périodes de fermeture de l'entreprise (8).

On peut encore affiner, voire définir des temps spécifiques. On appellera tout d'abord :

- t_1 le temps de disponibilité,
- t_2 le temps d'indisponibilité,
- t_3 le temps requis.

Puis sur la figure 7.19, on peut mettre en évidence deux autres temps, liés au service maintenance et aux contraintes d'exploitation :

- t_4 temps de maintenance intrinsèque (fourni par le constructeur),
- t_5 temps de maintenance opérationnelle.

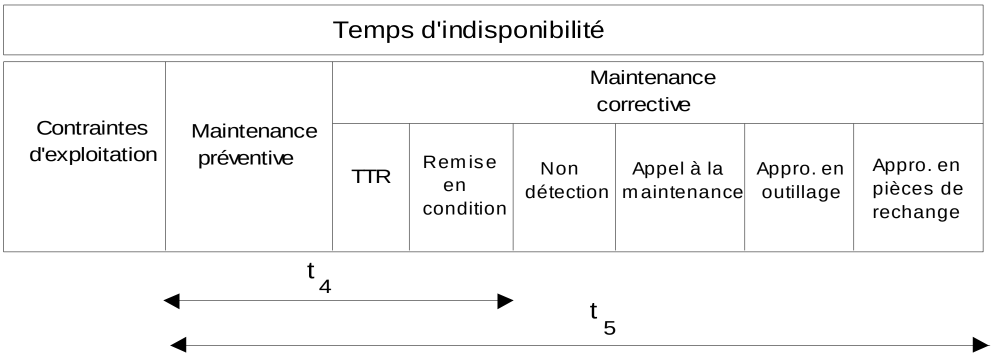

Figure 19 – Temps liés au service maintenance

5.3 – Disponibilités théoriques

5.31 – Disponibilité instantanée

C'est la probabilité pour qu'un matériel soit en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données à un instant t, en supposant que la fourniture des moyens extérieurs nécessaires soit assurée. Selon les lois suivis par les MTBF et MTTR, D(t) s'exprime par des fonctions plus ou moins complexes de $\lambda(t)$ et de $\mu(t)$. Pour un système élémentaire réparable, les deux états possibles sont :

- opérationnel avec la probabilité P_1,
- en panne avec la probabilité P_0.

Avec l'hypothèse d'un taux de défaillance λ et d'un taux de réparation μ constants, la disponibilité instantanée est égale à la probabilité de l'état opérationnel P_1 :

$$dP_1 = -\lambda P_1 dt + \mu P_0 dt$$

avec $P_0 + P_1 = 1$.

Dans ces conditions, $\frac{dP_1}{dt} = -\lambda P_1 + \mu P_0 = -(\lambda + \mu)P_1 + \mu$. On intègre cette expression et on obtient :

$$D(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.e^{-(\lambda+\mu)t}$$

On appelle *indisponibilité instantanée* I(t) la probabilité complémentaire :

$$\underline{\underline{I(t) = 1 - D(t)}}$$

5.32 – Disponibilité asymptotique

Encore appelée disponibilité intrinsèque, c'est la limite, lorsqu'elle existe, de la disponibilité instantanée, lorsqu'on fait tendre le temps vers l'infini. D'après la formule ci-dessus, et en gardant la même hypothèse, on voit tout de suite que :

$$\boxed{D_a = \frac{\mu}{\mu + \lambda}}$$

Cas particulier : si λ et μ sont constants alors $\underline{\underline{D_a = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}}}$.

Par rapport aux temps exprimés précédemment, on peut encore exprimer la disponibilité asymptotique sous la forme $\underline{\underline{D_a = \frac{t_1}{t_1 + t_4}}}$. La disponibilité asymptotique est donc celle fournie par le constructeur d'un équipement. Celui-ci ne peut pas en effet prendre en compte les causes extérieures d'indisponibilité et les carences du service maintenance.

5.4 – Disponibilité opérationnelle d'un équipement

Elle est évaluée en prenant en compte les paramètres temps moyens de disponibilité (MUT) et temps moyen d'indisponibilité (MDT).

$$\boxed{D_o = \frac{MUT}{MUT + MDT} = \frac{MUT}{MTBF}}$$

Cette disponibilité est un paramètre utilisateur, car elle pondère les caractéristiques intrinsèques à la conception, par la prise en compte de l'organisation client (qualité de la maintenance, qualité du soutien logistique, qualité de l'utilisation du système, etc..). En utilisant les temps définis précédemment, on obtient :

$$\boxed{D_o = \frac{t_1}{t_3} = \frac{\text{temps de disponibilité}}{\text{temps requis}}}$$

5.5 – Autres disponibilités

a) Disponibilité du point de vue maintenance

On s'intéresse ici à l'aspect disponibilité liée aux problèmes de carence du service maintenance. On a :

$$\boxed{D_M = \frac{t_3 - t_5}{t_3} = \frac{\text{temps requis - } \sum \text{temps d'arrêt pour maintenance}}{\text{temps requis}}}$$

b) Disponibilité globale

Elle caractérise le taux global d'utilisation de l'équipement. On a :

$$\boxed{D_G = \frac{\text{temps de disponibilité}}{\text{temps total}}}$$

5.6 - Amélioration de la disponibilité opérationnelle

La disponibilité opérationnelle a pour expression $D_o = \frac{\text{temps de disponibilité}}{\text{temps requis}}$. Or, le temps requis tient compte des problèmes d'indisponibilité dus aussi bien à la maintenance qu'à la production. C'est donc dans ces deux services qu'il va falloir chercher l'amélioration. Il ne faudra pas également oublier les caractéristiques intrinsèques des équipements, car on ne pourra jamais exiger de la production ou de la maintenance de qualité sans un matériel aux caractéristiques satisfaisantes.

1 - Améliorer l'organisation du service de production

- gestion de la production
- qualité
- gestion du personnel
- résoudre les problèmes externes (grèves, coupure d'énergie, ..)

2 - Améliorer l'organisation du service maintenance

- revoir la politique de maintenance (choix de la maintenance corrective ou de la maintenance préventive)
- préparation du travail
- ordonnancement
- temps logistiques (gestion du personnel, outillage de rechange ,etc..)

3 - Améliorer les caractéristiques intrinsèques du matériel

- fiabilité (choix de composants plus fiables)
- maintenabilité
- temps de diagnostic (logigramme, arbre de défaillance, système expert)
- temps de réparation (accessibilité, outillage adapté)

- améliorer l'entretien préventif (regroupement de certaines opérations)
- réduire les temps de changement d'outillages et de fabrication (SMED)

La figure 7.20 permet de comparer la disponibilité opérationnelle à la disponibilité du point de vue maintenance et à la disponibilité globale, puis d'en déduire la politique d'amélioration à mettre en œuvre afin d'améliorer la disponibilité opérationnelle.

6 – SECURITE INTRINSEQUE

***Définition normalisée** : Probabilité qu'un dispositif accomplisse une mission spécifiée dans des conditions et pendant un temps donné, sans placer le système dans des situations catastrophiques.*

La sécurité intrinsèque a donc pour but d'obtenir un système sûr, c'est à dire ne risquant pas d'occasionner la perte ou la blessure de personnes, des dommages ou des pertes de biens ou d'équipements, que le système soit en état de fonctionnement normal, dégradé ou en état de non fonctionnement. Cela doit se traduire par l'imposition d'exigences contractuelles (au même titre que les exigences de fiabilité, maintenabilité et disponibilité) à intégrer dés la conception. Des études de sécurité résulteront de ces expériences. En particulier, on notera que les analyses de type AMDEC, arbres de défaillances,... favoriseront l'obtention d'une sécurité optimale.

6.1 – Modélisation

Les composants et/ou fonctions sont représentés par des blocs fonctionnels. La modélisation consistera à rechercher des liens (série, parallèle) entre ces blocs afin de pouvoir déterminer les paramètres FMDS de l'ensemble.

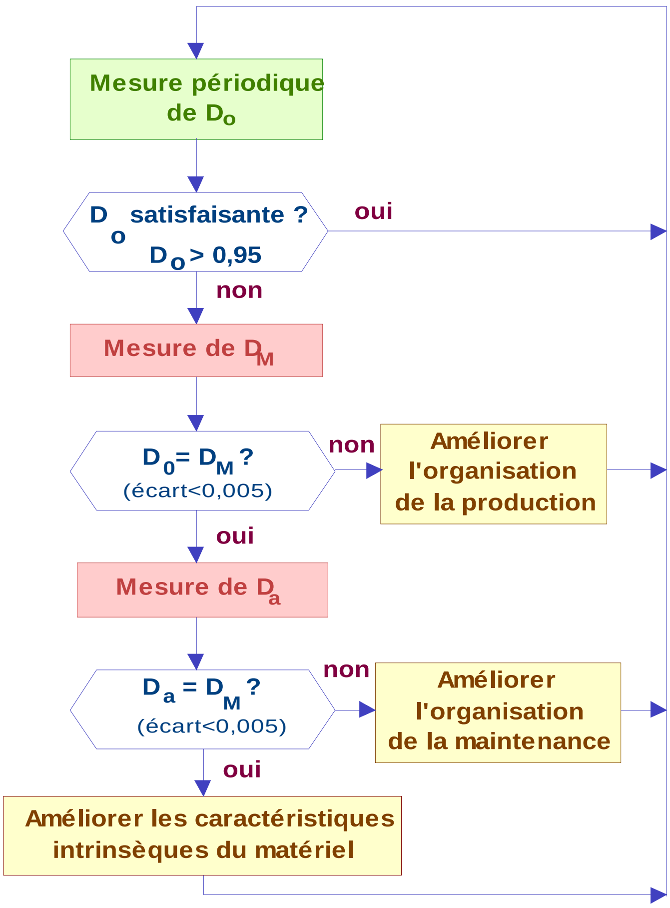

Figure 20 – Amélioration de la disponibilité[5]

[5] D'après Maintenance des systèmes automatisés – Denis, Murail, Bianciotto, Boye - Delagrave

6.11 – Diagramme fonctionnel série

Dans un système série, la défaillance d'un composant entraîne la défaillance de l'ensemble. En conséquence, le système est fiable si tous les éléments du système sont eux-mêmes fiables. C'est la même approche pour la disponibilité.

On considère une chaîne série d'éléments réparables (λ_i et μ_i) et d'éléments non réparables (λ_k uniquement). Ces éléments sont indépendants entre eux.

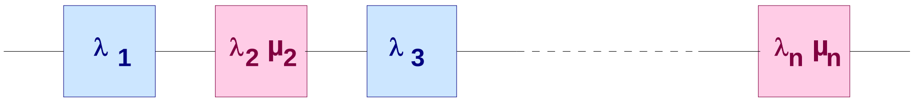

Figure 21–- Diagramme fonctionnel série

Au regard de ce schéma, il est facile de constater que si un seul des éléments est défaillant, l'ensemble l'est également. Donc, la fiabilité résultante est donnée par :

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

On sépare les éléments non réparables de ceux qui le sont. On a :

a) *<u>pour les éléments non réparables</u>*

$$R(t)_{\text{non rép}} = \prod_{k=1}^{m} R_k = \prod_{k=1}^{m} e^{-\lambda_k t} = e^{-\lambda_{\text{non rép}} t} \text{ avec } \underline{\underline{\lambda_{\text{non rép}} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k \text{ non rép}}}} \text{, et donc :}$$

$$\underline{\underline{D(t)_{\text{non rép}} = R(t)_{\text{non rép}}}}$$

b) *<u>pour les éléments réparables</u>*

$$R(t)_{\text{rép}} = \prod_{i=1}^{n} R_i = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-\lambda_{\text{rép}} t} \text{ avec } \underline{\underline{\lambda_{\text{rép}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i \text{ rép}}}}$$

D'autre part $MTTR = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i} = \dfrac{1}{\mu_{sys}}$. Dans ces conditions, la disponibilité asymptotique des systèmes réparables s'écrit :

$$\underline{\underline{D_{a \text{ rép}} = \frac{MTBF_{\text{rép}}}{MTBF_{\text{rép}} + MTTR} = \frac{\mu_{sys}}{\lambda_{\text{rép}} + \mu_{sys}}}}$$

c) *<u>pour l'ensemble du système série</u>*

$$\underline{\underline{D(t)_{sys} = D(t)_{\text{rép}} . D(t)_{\text{non rép}} = D(t)_{\text{rép}} . R(t)_{\text{non rép}}}}$$

6.12 – Diagramme fonctionnel parallèle

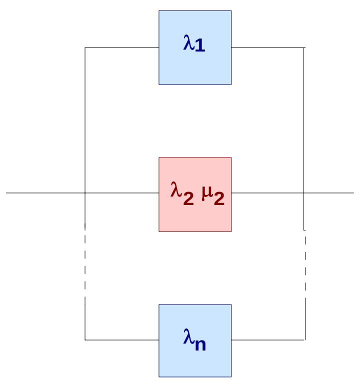

Figure 22 – Diagramme fonctionnel parallèle

La défaillance d'un élément n'entraîne pas la défaillance du système. De ce fait, le système est défaillant, si et seulement si tous les éléments du système sont **simultanément** défaillants. Dans ces conditions, la défaillance globale de l'ensemble est donnée par :

$$F(t) = F_1(t).F_2(t).F_3(t)....F_n(t)$$

soit :

$$1 - R(t) = [1 - R_1(t)].[1 - R_2(t)]....[1 - R_n(t)]$$

Donc, plus il y a d'éléments en parallèle, meilleure est la fiabilité. Sous le nom de « **redondance** », on utilise cette propriété pour accroître la sécurité d'un système. C'est la même approche pour la disponibilité.

a) *pour les éléments non réparables*

$$R(t)_{\text{non rép}} = 1 - \prod_{k=1}^{m}(1 - R_k) = 1 - \prod_{k=1}^{m}(1 - e^{-\lambda_{\text{non rép}} t})$$

et donc :

$$\underline{\underline{D(t)_{\text{non rép}} = R(t)_{\text{non rép}}}}$$

b) *pour les éléments réparables*

$$R(t)_{\text{rép}} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-\lambda_{i\,\text{rép}}.t})$$

soit $$\underline{\underline{D_{a\,\text{rép}} = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\lambda_{i\,\text{rép}}}{\lambda_{i\,\text{rép}} + \mu_i}\right]}}$$

Cas particulier : si on a deux éléments en parallèle, on a une redondance d'ordre 1 formulée par :

$$R = R_1 + R_2 - R_1.R_2$$

c) *pour l'ensemble du système parallèle*

Un système composé d'éléments réparables et non réparables en parallèle se rencontre rarement. Toutefois, les calculs sont possibles :

$$R(t)_{\text{sys}} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-\lambda_i t})$$

Le système est indisponible si et seulement si les éléments réparables et non réparables sont simultanément indisponibles :

$$\underline{\underline{D(t)_{\text{sys}} = 1 - [(1 - D_{a\,\text{rép}})(1 - R(t)_{\text{non rép}})]}}$$

6.2 – Systèmes redondants

On distingue trois catégories de redondance :

- la redondance active de type 1/n ou k/n,
- la redondance passive,
- la redondance majoritaire.

6.21 – Redondance active (k/n)

La redondance active est un cas fréquent de système parallèle : tous les composants sont identiques et fonctionnent tous normalement, alors qu'une partie seulement est nécessaire (k éléments parmi n).

a) *pour les éléments non réparables*

La fiabilité d'une redondance active d'éléments non réparables ($\sum \lambda_{i\,\text{non rép}}$) s'exprime par :

$$\underline{\underline{R(t) = \sum C_n^k.R^k.(1 - R)^{n-k}}}$$

Exemples :

1. redondance 1/2 $R_{1/2} = 2R - R^2 = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$
2. redondance 1/3 $R_{1/3} = R^3 - 3R^2 + 3R = e^{-3\lambda t} - 3e^{-2\lambda t} + 3e^{-\lambda t}$
3. le cas où $k = n - 1$ est fréquent, l'équation générale ci-dessus devient :

$$R(t)_{n-1/n} = n.R^{n-1} - (n-1)R^n$$

Le MTBF est alors :

$$MTBF = \int R(t)dt = \frac{1}{\lambda}\sum_k \frac{1}{k}$$

Par le même raisonnement, la disponibilité est :

$$D(t) = R(t) = \sum C_n^k.D^k.(1-D)^{n-k}$$

et dans le cas fréquent de $k = n - 1$:

$$D(t)_{n-1/n} = R(t)_{n-1/n} = n.D^{n-1} - (n-1)D^n$$

b) <u>pour les éléments réparables</u>

La fiabilité d'une redondance active d'éléments réparables ($\sum \lambda_{i\,rép}$) s'exprime par :

$$R(t) = \sum C_n^k.R^k.(1-R)^{n-k}$$

Dans le cas fréquent où $k = n - 1$, l'équation générale ci-dessus devient :

$$R(t)_{n-1/n} = n.R^{n-1} - (n-1)R^n$$

Le MTBF est beaucoup plus compliqué à calculer et, en tout état de cause, n'entre pas dans le cadre de ce cours. Néanmoins, les formules précédentes fournissent une bonne approximation :

$$D(t) = R(t) = \sum C_n^k.D^k.(1-D)^{n-k}$$

et dans le cas fréquent de $k = n - 1$:

$$D(t)_{n-1/n} = R(t)_{n-1/n} = n.D^{n-1} - (n-1)D^n$$

6.22 – Redondance passive

Le fonctionnement du système ne nécessite que le fonctionnement d'un seul élément, les autres pouvant être à l'arrêt, en attente (« stand by »). En contrepartie, il est nécessaire de disposer de dispositifs de détection/commutation (DC) très fiables (figure 7.23).

A) Redondance passive à deux éléments

On considère le schéma de la figure 7.23. Ce système comporte un élément E_1 dont le taux de défaillance est λ_1 et un élément E_2, de taux de défaillance λ_2.

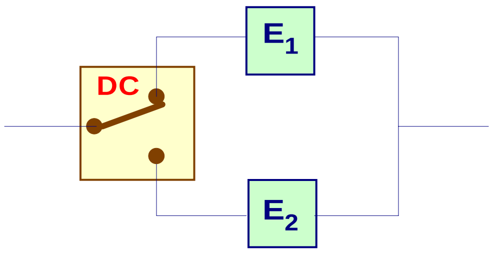

Figure 23 – Redondance passive à 2 éléments.

L'ensemble pourra fonctionner jusqu'à t selon deux possibilités :

- l'organe normal E_1 fonctionne sans panne jusqu'à t, donc $P_1 = e^{-\lambda_1 t}$;
- E_1 fonctionne jusqu'à x < t ; l'organe E_2 est alors mis en service grâce à DC, il prend la suite de x + dx jusqu'à t, donc :

$$P_2 = \int e^{-\lambda_1 x}.\lambda_1.dx.e^{-\lambda_2(t-x)} = \lambda_1.e^{-\lambda_2 t}\int e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}dx$$

Supposons que E_1 et E_2 soient identiques, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, alors $P_2 = \lambda.e^{-\lambda t}\int_0^t dx = \lambda.t.e^{-\lambda t}$ Dans ces conditions :

$$R(t) = P_1 + P_2 = e^{-\lambda t} + \lambda.t.e^{-\lambda t} = (1+\lambda.t).e^{-\lambda t}$$

La prise en compte du module DC, en série avec E_1 et E_2, pondérera la formule ci-dessus :

$$\boxed{R(t) = e^{-\lambda_{DC}t}(1+\lambda.t).e^{-\lambda t} = (1+\lambda.t).e^{-(\lambda+\lambda_{DC})t}}$$

B) Redondance passive 1/n éléments

En généralisant la formule précédente à n éléments, il vient $R(t) = e^{-(\lambda+\lambda_{DC})t}.\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda.t)^i}{i!}$. Si on dispose d'un nombre infini d'éléments identiques en redondance passive, on obtient $R(t) = e^{-(\lambda+\lambda_{DC})t}.\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda.t)^i}{i!}$ Or, $\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda.t)^i}{i!}$ représente le développement en série entière de $e^{\lambda t}$. La relation précédente devient alors :

$$\underline{\underline{R(t) = e^{-(\lambda+\lambda_{DC})t}.e^{\lambda t} = e^{-\lambda_{DC}t}}}$$

La fiabilité du système ne dépend plus que de la fiabilité de l'élément DC !....

6.23 – Redondance majoritaire

Ce type de redondance concerne essentiellement les systèmes « à grande sécurité », comme en aéronautique ou dans le domaine du nucléaire. La figure 7.24 donne la structure d'un système à redondance majoritaire à trois éléments.

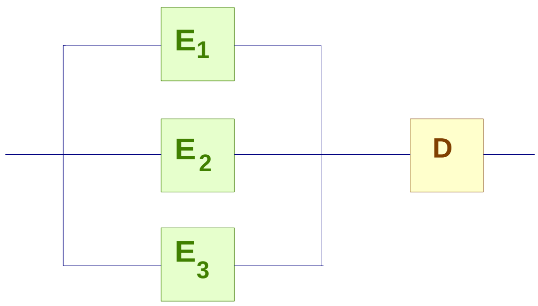

Figure 24 – Redondance majoritaire à 3 éléments

D est ici un organe de décision qui ne validera la sortie que si une majorité d'éléments E_i fonctionne ; cela signifie que le nombre i d'éléments E_i est impair.
D'après le paragraphe 6.21, on a une redondance 2/3, donc $R(t)_{2/3} = 3R^2 - 2R^3 = 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}$. Si on inclut la fiabilité $R_D = e^{-\lambda_D t}$ de l'organe D, on obtient donc :

$$R(t)_{2/3} = (3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t})e^{-\lambda_D t}$$

En étendant le système à n éléments, avec n impair, on obtiendra :

$$\boxed{R(t) = R_D.\sum_{\frac{n+1}{2}}^{n} C_n^k.R^k.(1-R)^{n-k}}$$

ANNEXE : LOI DE WEIBULL

La loi de Weibull est le modèle le plus général utilisé en maintenance. Elle s'écrit :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}} \quad \text{si } t > \gamma$$

$$R(t) = 1 \text{ si } t \leq \gamma$$

C'est une loi à trois paramètres, très souple, qui couvre les cas de taux de défaillance variables, décroissants (période de jeunesse) ou croissants (période de vieillesse). Son exploitation fournit :

- une estimation du MTBF,
- les équations de la fiabilité R(t) et du taux de défaillance λ(t),
- le paramètre de forme β qui peut orienter le diagnostic.

Le **paramètre** β est un nombre positif sans dimension qui détermine la forme de la distribution f(t) des défaillances (d'où son nom de paramètre de forme) :

- si $\beta = 1$, le taux de défaillance est constant,
- si $0 < \beta < 1$, le taux de défaillance est décroissant (période de jeunesse),
- si $\beta > 1$, le taux de défaillance est croissant (période de vieillesse).

Il peut servir d'indicateur de diagnostic : par exemple si $1{,}1 < \beta < 1{,}6$, il révèle un phénomène de fatigue. C'est le cas des roulements à billes dont la valeur normale est $\beta = 1$.

Le **paramètre** γ est appelé paramètre de position. Il fixe l'origine de l'étude et définit donc un changement d'origine dans l'échelle des temps. Il s'exprime dans la même unité que t (temps absolu ou unité d'usage). Par exemple :

- si $\gamma > 0$, cela signifie qu'il n'y a pas eu de défaillance dans l'intervalle $[0, \gamma]$;
- par contre si $\gamma = 0$, il peut y avoir une panne dès la mise en route (panne de jeunesse par exemple) ;
- enfin si $\gamma < 0$, la construction de l'équipement est défectueuse (panne avant la mise en route) ou alors l'étude a débuté après les premières défaillances (pas d'historique).

Le **paramètre** η est appelé paramètre d'échelle ou « caractéristique de vie ». C'est un nombre positif permettant un changement de l'échelle des temps. Il s'exprime dans la même unité que t.

Remarque : pour $\gamma = 0$ et $\beta = 1$, on retrouve la loi exponentielle. Celle-ci est donc un cas particulier de la loi de Weibull.

1 – Expressions mathématiques caractéristiques de la loi de Weibull

A partir de l'expression de R(t), on peut calculer la fonction de défaillance F, la densité de probabilité f(t).

A – Fonction de défaillance

Par définition, F(t) = 1 – R(t), donc :

- $F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$ si $t > \gamma$
- $F(t) = 0$ si $t \leq \gamma$

B – Distribution des défaillances

On obtient la loi de distribution des défaillances en dérivant la fonction de défaillance. Donc :

- $f(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} . e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$ si $t \geq \gamma$
- $f(t) = 0$ si $t \leq \gamma$

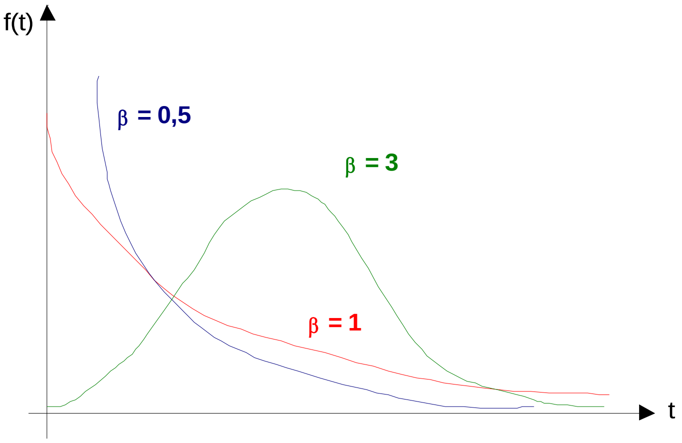

Figure A1 – Influence de β sur la densité de probabilité f(t)

Si $\beta \approx 2{,}5$, f(t) est du type courbe de Gauss. On se rapproche d'une loi de distribution normale.

2 – Application de la loi de Weibull en maintenance

Les expressions précédentes vont nous permettre de déterminer le taux de défaillance, le MTBF, l'écart-type et la durée de vie associée à un seuil de fiabilité.

A – Taux de défaillance

L'expression du taux de défaillance s'écrit $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$. Cette expression n'a de sens que si t > γ, d'où :

$$\boxed{\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}}$$

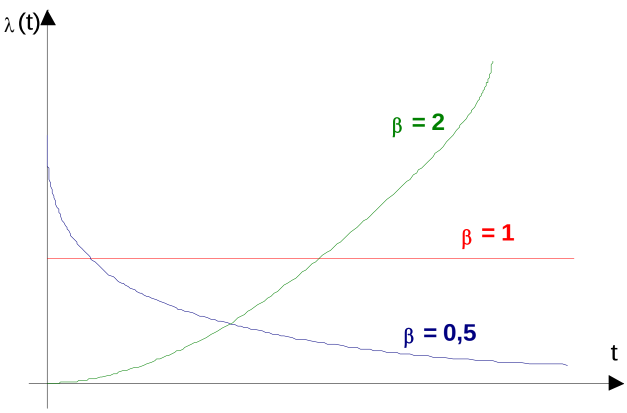

Figure A2 - Influence de β sur le taux de défaillance

Sur la figure A2, on constate bien que :

- si $\beta < 1$, le taux de défaillance est décroissant, donc on est dans la période de jeunesse
- si $\beta = 1$, le taux de défaillance est constant (on est dans la période de vie utile),
- si $\beta > 1$, le taux de défaillance est croissant (on est dans la période de vieillissement),
- si $1{,}5 < \beta < 2{,}5$, il s'agit en général d'un vieillissement par phénomène de fatigue,
- si $3 < \beta < 4$, il s'agit en général d'un vieillissement par usure ou corrosion.

B – MTBF

C'est l'espérance mathématique de la durée de vie T, soit $E(T)=\int_{\gamma}^{+\infty} t.f(t).dt=\int_{\gamma}^{+\infty} t.\frac{\beta}{\eta}.\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}.e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}.dt$. Posons $u=\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}$, soit $t=\eta.u^{\frac{1}{\beta}}+\gamma$ et $du=\frac{\beta}{\eta}.\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}.dt$, l'expression précédente s'écrit :

$$E(T)=\int_{0}^{+\infty}\left(\eta.u^{\frac{1}{\beta}}+\gamma\right).e^{-u}.du=\eta.\int_{0}^{+\infty} u^{\frac{1}{\beta}}.e^{-u}.du+\gamma.\int_{0}^{+\infty} e^{-u}.du$$

La forme de la première intégrale est celle de la fonction eulérienne Γ définie par l'intégrale généralisée convergente $\Gamma(x)=\int_{0}^{+\infty} e^{-t}.t^{x-1}dt$ dont on possède des tables pour son calcul approché.

On obtient finalement. $\boxed{MTBF=\eta.\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\gamma}$.

Le calcul pratique du MTBF s'effectue grâce à la formule $MTBF=\eta.A+\gamma$ où A est donné par la table de la loi de Weibull donnée ci-dessous.

β	A	B	β	A	B	β	A	B
0,2	120	1901	1,7	0,8922	0,540	4,4	0,9114	0,235
0,25	24	199	1,75	0,8906	0,525	4,5	0,9126	0,230
0,3	9,2605	50,08	1,8	0,8893	0,511	4,6	0,9137	0,226
0,35	5,0291	19,98	1,85	0,8882	0,498	4,7	0,9149	0,222
0,4	3,3234	10,44	1,9	0,8874	0,486	4,8	0,9160	0,218
0,45	2,4786	6,46	1,95	0,8867	0,474	4,9	0,9171	0,214
0,5	2	4,47	2	0,8862	0,463	5	0,9182	0,210
0,55	1,7024	3,35	2,1	0,8857	0,443	5,1	0,9192	0,207
0,6	1,5046	2,65	2,2	0,8856	0,425	5,2	0,9202	0,203
0,65	1,3663	2,18	2,3	0,8859	0,409	5,3	0,9213	0,200
0,7	1,2638	1,85	2,4	0,8865	0,393	5,4	0,9222	0,197
0,75	1,1906	1,61	2,5	0,8873	0,380	5,5	0,9232	0,194
0,8	1,1330	1,43	2,6	0,8882	0,367	5,6	0,9241	0,191
0,85	1,0880	1,29	2,7	0,8893	0,355	5,7	0,9251	0,188
0,9	1,0522	1,17	2,8	0,8905	0,344	5,8	0,9260	0,185
0,95	1,0234	1,08	2,9	0,8917	0,334	5,9	0,9269	0,183
1	1	1	3	0,8930	0,325	6	0,9277	0,180
1,05	0,9603	0,934	3,1	0,8943	0,316	6,1	0,9286	0,177
1,1	0,9649	0,878	3,2	0,8957	0,307	6,2	0,9294	0,175
1,15	0,9517	0,830	3,3	0,8970	0,299	6,3	0,9302	0,172
1,2	0,9407	0,787	3,4	0,8984	0,292	6,4	0,931	0,170
1,25	0,9314	0,750	3,5	0,8997	0,285	6,5	0,9318	0,168
1,3	0,9236	0,716	3,6	0,9011	0,278	6,6	0,9325	0,166
1,35	0,9170	0,687	3,7	0,9025	0,272	6,7	0,9333	0,163
1,4	0,9114	0,660	3,8	0,9038	0,266	6,8	0,9340	0,161
1,45	0,9067	0,635	3,9	0,9051	0,260	6,9	0,9347	0,160
1,5	0,9027	0,613	4	0,9064	0,254			
1,55	0,8994	0,593	4,1	0,9077	0,249			
1,6	0,8966	0,574	4,2	0,9089	0,244			
1,65	0,8942	0,556	4,3	0,9102	0,239			

Figure A3 – Table de la loi de Weibull

C – Variance et écart-type

Pour calculer la variance, on calcule tout d'abord le moment d'ordre 2 :

$$E(T^2) = \int_0^{+\infty} t^2.f(t).dt = \int_0^{+\infty} t^2.\frac{\beta}{\eta}.\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}.e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}.dt$$

On effectue le même changement de variable que précédemment, donc :

$$E(T^2) = \int_0^{+\infty}\left(\eta.u^{\frac{1}{\beta}}+\gamma\right)^2.e^{-u}.du = \eta^2.\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)+2\eta\beta.\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\gamma^2$$

La variance est donnée par :

$$V(T) = \sigma^2(T) = E(T^2) - E^2(T) = \eta^2.\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \eta^2.\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\right] = \eta^2.\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - .\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\right]$$

On pose $B^2 = \Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - .\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2$ et on en déduit que $\boxed{\sigma(T) = B.\eta}$.

Comme le nombre A, B est donné par la table de Weibull.

D – Durée de vie associée à un seuil de fiabilité

La loi R(t) permet d'associer la fiabilité de fonctionnement d'un équipement à chaque instant. Inversement, on peut se demander quand cet équipement atteindra un seuil de fiabilité fixé a priori, ce qui permettra de calculer sa durée de vie T. On a $R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$, soit $\ln[R(t)] = -\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}$ ou encore $\frac{t-\gamma}{\eta} = \left[\ln\frac{1}{R(t)}\right]^{\frac{1}{\beta}}$. On obtient finalement :

$$\boxed{T = \gamma + \eta.\left[\ln\frac{1}{R(t)}\right]^{\frac{1}{\beta}}}$$

Exemple : la durée de vie estimée d'un roulement à billes est celle qui est associée à une fiabilité de 0,9. Si l'on connaît les 3 paramètres de la loi de Weibull, on en déduira T.

3 – Détermination graphique des paramètres de la loi de Weibull

L'étude d'un historique d'équipement permet d'obtenir une estimation de la fonction de défaillance F(t) pour un certain nombre de valeurs de t. Le problème est donc de déterminer les paramètres ajustant cette fonction. Cette détermination est facilitée par l'emploi d'un papier à échelle « log-log », imaginé par Allen PLAIT et appelé encore « papier de Weibull ».

A – Justification théorique

Nous partons de l'expression de l'expression de la fiabilité dont nous avons pris le logarithme népérien (paragraphe 2D ci-dessus), à savoir :

$$\ln[R(t)] = -\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}$$

Cette expression peut encore s'écrire sous la forme $\ln[\frac{1}{R(t)}] = \ln[\frac{1}{1-F(t)}] = \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}$, soit encore :

$$\ln\left[\ln[\frac{1}{1-F(t)}]\right] = \beta.\left[\ln(t-\gamma) - \ln\eta\right]$$

On pose $Y = \ln\left[\ln[\frac{1}{1-F(t)}]\right]$ et $X = \ln(t-\gamma)$, on en déduit que $\boxed{Y = \beta X - \beta\ln\eta}$. On obtient une relation linéaire.

C'est la droite de régression D du nuage de points $[t_i, F(t_i)]$. Elle a pour pente β.

B – Description du papier de Weibull

Ce papier log-log comporte quatre axes (figure A4) :

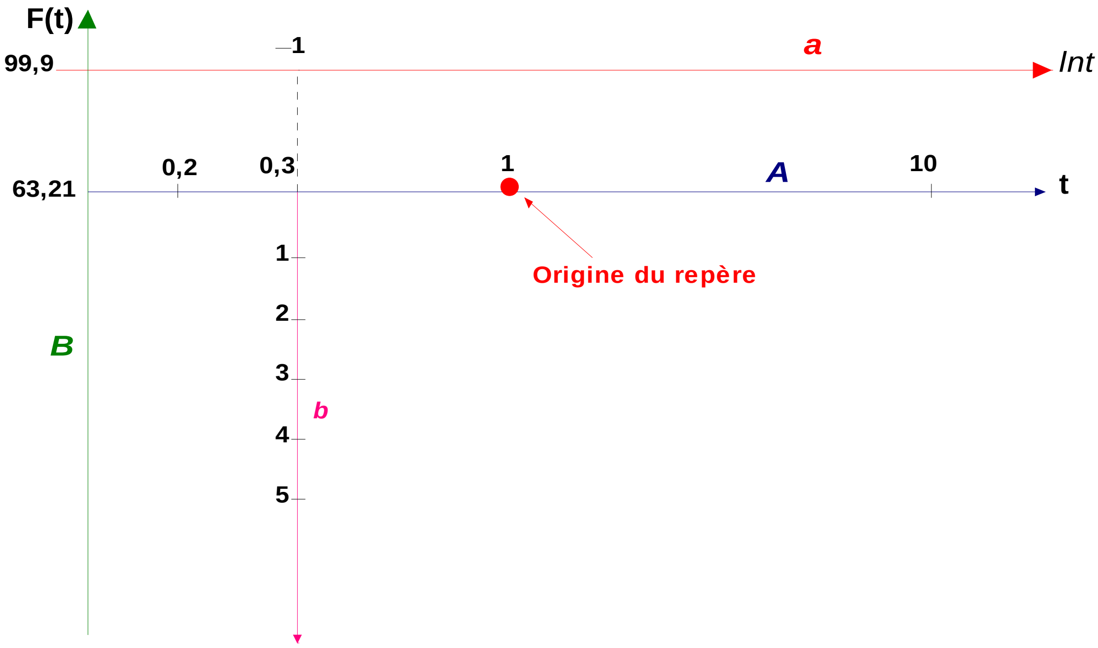

Figure A4 – Axes du papier de Weibull

- l'axe A en abscisse est l'axe des temps sur lequel on portera les valeurs t (TBF si le système est réparable, TTF si le système est non réparable) ;
- l'axe B en ordonnée est l'axe sur lequel on porte les valeurs de F(t) qu'on aura calculé en utilisant les formules d'approximation des rangs bruts moyens ou médians selon le nombre de valeurs de t (voir rappel plus bas) ; il est déjà gradué en pourcentage.
- l'axe a correspond à lnt ;
- l'axe b correspond à $\ln\left[\ln[\frac{1}{1-F(t)}]\right]$.

C – Méthodologie de l'ajustement graphique

1) Préparation des données : recueillir d'après les historiques les TBF ou TTF de l'équipement étudié et classer ces temps par ordre croissant. Soit N leur nombre.

2) Attribuer à chaque temps un ordre i de 1 à N (s'il y a plusieurs temps égaux, on leur attribuera des rangs successifs i, i+1, i+2, etc..

3) Calculer la fonction relative cumulée de défaillance F(t) pour chaque temps t_i considéré.

Rappel - Si N représente le nombre de données, on estime F(t) à l'instant de la $i^{ème}$ défaillance par :

- $F(t) = \frac{i}{N}$ si N > 50 (méthode des rangs bruts),
- $F(t) = \frac{i}{N+1}$ si 20 < N < 50 (méthode des rangs moyens),
- $F(t) = \frac{i-0,3}{N+0,4}$ si $N \leq 20$ (méthode des rangs médians).

4) Tracer le nuage de points $[t_i, F(t_i)]$.

5) Tracé de la droite D dite « de Weibull »

On trace tout d'abord la droite d'ajustement D, puis la droite D', parallèle à D passant par le point d'abscisse 1, origine du repère.

6) Détermination des valeurs des paramètres β, η et γ

- le paramètre β est la pente de la droite D, c'est à dire l'intersection de D' avec l'axe b ;

- le paramètre η est l'intersection de D avec l'axe des temps X,
- le paramètre γ est lié à la forme du nuage.

5) Détermination de l'expression de la loi de Weibull
6) Détermination du MTBF
7) Exploitation des résultats

D – Forme du nuage de points

Le nuage de points n'est pas toujours ajustable par une droite : il est alors ajustable par une courbe dont la concavité reste constante. On montre que (il suffit pour cela d'observer le signe de la dérivée seconde de $\beta.[\ln(t-\gamma)-\ln\eta]$) :

- si le nuage est ajustable par une droite alors $\gamma = 0$,
- si la concavité du nuage est tournée vers le bas, alors $\gamma > 0$,
- si la concavité du nuage est tournée vers le haut, alors $\gamma < 0$ (cas très rare).

Lorsque le nuage de points peut être représenté par une courbe, il faut alors essayer de transformer cette courbe en droite, par translation d'une valeur qui sera γ.

La recherche du paramètre γ peut s'effectuer en prenant trois points du nuage de Weibull (figure A5). Pour obtenir une bonne précision, il faut que les points P1 et P3 soient suffisamment éloignés et non extrêmes. On les choisit aussi de manière que les projections de P1P2 et P2P3 sur l'axe b soient égales. On obtient :

$$\boxed{\gamma = \frac{t_2^2 - t_1 t_3}{2t_2 - t_1 - t_3}}$$

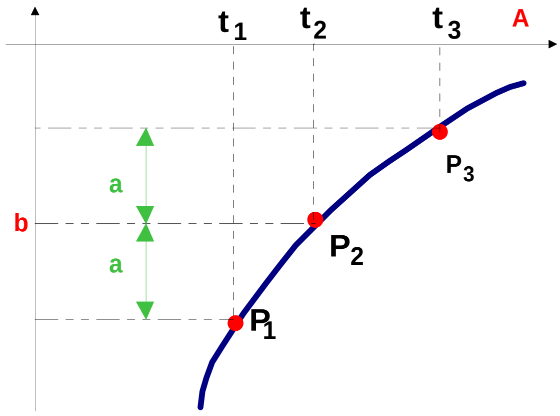

Figure A5 – Détermination de γ

E – Redressement de la concavité

On translate tous les points de la courbe de la valeur γ. Du fait de l'échelle logarithmique, les points se retrouvent sur une droite qui est tout simplement la droite D.

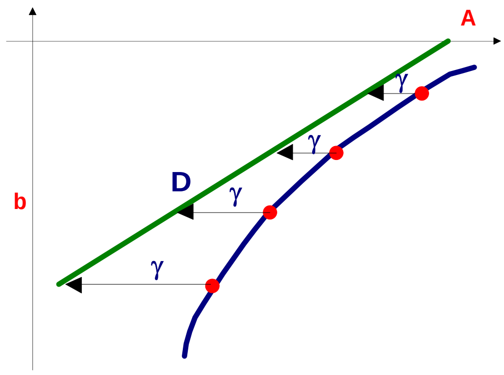

Figure A.6 – Redressement de la concavité

F – Cas où le nuage de point ne peut être ajusté par une droite ou une courbe

Dans ce cas, le modèle de Weibull ne peut pas s'appliquer.