Dérivabilité

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D, et soit a un élément de D.
f est définie « au voisinage » de a.
Le nombre dérivé de f en x=a est noté f '(a) et est défini par :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Tangente à la courbe :

La tangente au point A d'abscisse a de la courbe représentative de f a pour équation :
y = f '(a)(x – a) + f(a)

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : f '(a)

Si $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors la courbe de f admet au point A(a,f(a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut	Si $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors la courbe de f admet au point A(a,f(a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le bas
Si $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors la courbe de f admet au point A(a,f(a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le bas	Si $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors la courbe de f admet au point A(a,f(a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

Règles de dérivation

Nom	Règle	Conditions
Linéarité	$(af)' = af'$	Quels que soient la fonction dérivable f et le réel a.
Linéarité	$(f+g)' = f' + g'$	Quelles que soient les fonctions dérivables f et g.
Produit	$(fg)' = f'g + fg'$	Quelles que soient les fonctions dérivables f et g.
Inverse	$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$	Quelle que soit la fonction dérivable g qui ne s'annule pas (cas particulier f =1 de la ligne suivante)
Quotient	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	Quelles que soient la fonction dérivable f et la fonction dérivable g qui ne s'annule pas
Puissance	$\left(f^n\right)' = n.f'.f^{n-1}$	$\forall$ n $\in \mathbb{Z}$
Racine	$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$	Quelle que soit la fonction dérivable f strictement positive (cas particulier α=1/2 de la ligne précédente)

fonction f	fonction dérivée f '	ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto x^2$	$f' : x \longmapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^3$	$f' : x \longmapsto 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$f' : x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$	$f' : x \longmapsto -\dfrac{2}{x^3}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f : x \longmapsto \sin x$	$f' : x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \cos x$	$f' : x \longmapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \tan x$	$f' : x \longmapsto 1+\tan^2 x$	$\left]\dfrac{-\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad ;k \in \mathbb{Z}$

__DERIVEE DE__ $f : x \longmapsto g(ax+b)$

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I .
Pour tout réel x , tel que $ax + b \in I$, la fonction $f : x \longmapsto g(ax+b)$ est dérivable et :

$$\mathbf{f'(x) = a.g'(ax+b)}$$