IUT du Havre Département Informatique

Mathématiques Semestre 2

Série d'exercices n°12
Relations d'équivalence

> **Rappel** : Une $\mathcal{R}$ une relation dans un ensemble E est une relation d'équivalence ssi elle est à la fois :
> - réflexive
> - symétrique
> - transitive

Exercice 1 *On considère les relations suivantes :*

$$\begin{array}{llll} \mathcal{R} \textit{ définie dans } \mathbb{R} & \textit{par :} & x\mathcal{R}y \quad \textit{si} & x.y \geqslant 0. \\ \mathcal{T} \textit{ définie dans } \mathbb{R} & \textit{par :} & x\mathcal{T}y \quad \textit{si} & x.y > 0. \\ \mathcal{S} \textit{ définie dans } \mathbb{R}^* & \textit{par :} & x\mathcal{S}y \quad \textit{si} & x.y > 0. \end{array}$$

1. *Etudier les propriétés de ces relations.*
2. *Lorsqu'il s'agit d'une relation d'équivalence, donner les classes d'équivalence.*

Exercice 2 *Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence.*

Donner les classes d'équivalence.

1. *$\mathcal{R}$ est la relation dans $\mathbb{Z}$ définie par : $x\mathcal{R}y$ si $x - y$ est pair.*
2. *$\mathcal{S}$ est la relation dans $\mathbb{R}$ définie par : $x\mathcal{S}y$ si $x^2 = y^2$.*
3. *$\mathcal{T}$ est la relation dans $\mathbb{R}$ définie par : $x\mathcal{T}y$ si $\cos x = \cos y$.*

Exercice 3 ***Etude des congruences***

1. *Montrer que, pour x et y entiers relatifs quelconques, on a :*

   x a même reste que y dans la division euclidienne par 6,
   si et seulement si $x - y$ est multiple de 6.

2. *On rappelle qu'on note alors : $x \equiv y \pmod 6$.*

   Rappeler les propriétés de cette relation de congruence modulo 6 dans $\mathbb{Z}$.

3. *On note $cl(a)$ la classe d'équivalence (pour la congruence modulo 6) d'un entier relatif a.*

   Donner les différentes classes d'équivalence. On note $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'ensemble de ces classes.

4. *Montrer que, si on ajoute un élément quelconque de $cl(3)$ avec un élément quelconque de $cl(4)$, on obtient toujours un élément de $cl(1)$.*

5. *Plus généralement, pour a et b entiers relatifs quelconques, montrer que la somme d'un élément de $cl(a)$ avec un élément de $cl(b)$ est toujours un élément de $cl(a+b)$.*

6. *On définit alors $\oplus$, la somme de deux classes d'équivalence, par*

$$cl(a) \oplus cl(b) = cl(a+b)$$

Compléter la table d'addition

$\oplus$	$cl(0)$	$cl(1)$	$cl(2)$	$cl(3)$	$cl(4)$	$cl(5)$
$cl(0)$						
$cl(1)$						
$cl(2)$						
$cl(3)$						
$cl(4)$						
$cl(5)$						

7. *Etudier de même le produit d'un élément de $cl(3)$ avec un élément de $cl(4)$, puis le produit d'un élément de $cl(a)$ avec un élément de $cl(b)$.*

Donner une définition de la multiplication dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, notée $\otimes$ et compléter la table de multiplication

$\otimes$	$cl(0)$	$cl(1)$	$cl(2)$	$cl(3)$	$cl(4)$	$cl(5)$
$cl(0)$						
$cl(1)$						
$cl(2)$						
$cl(3)$						
$cl(4)$						
$cl(5)$						

Utiliser les tables ci-dessus pour résoudre les équations (dont l'inconnue X est un élément de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$) :

$$\begin{cases} X \oplus cl(4) = cl(0) \\ X \otimes cl(4) = cl(0) \\ [cl(5) \otimes X] \oplus cl(2) = cl(3). \end{cases}$$