Université Chouaïb Doukkali *Année universitaire 2011-2012*
Ecole Nationale des Sciences Appliquées Semestre 2, *CIP21*. Pr. Amrani

TD d'Algèbre 2. Série 3.

Réduction des matrices et des endomorphismes.

Exercice 1

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

$$T_1=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}, T_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & a & b\\ 0 & 1 & 3 & c\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ T_3=\begin{vmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}, \text{matrice de type } (n,n).$$

Exercice 2

1. A quelles conditions les matrices réelles suivantes sont elles diagonalisables :

$$A_1=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ a & 0 & 1\\ 0 & 2a & -2\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1 & a & a & a\\ 0 & 1 & b & b\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

2. Peut-on diagonaliser $A_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3

Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E, et $m\in\mathbb{N}^*$.

1. On suppose que $0\in Sp_K(f^n)$. Montrer que $0\in Sp_K(f)$.
2. Montrer que $0\notin Sp_K(f)\Leftrightarrow f$ est surjectif.

Exercice 4

Soit u un automorphisme d'un K-espace vectoriel E.

Etablir $Sp_K(u^{-1})=\left\{\lambda^{-1}/\lambda\in\ p_K(u)\right\}$.

Exercice 5

Soit u et v deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel E. Montrer que $u\circ v$ et $v\circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 6

Montrer que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par : $P\to 3X\,P-(X^2-1)P'$ est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres