BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2012

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures　　　　Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Exercice 1 : 5 points

Commun à tous les candidats

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n pour $x \in \mathbb{R}$ adéquat par $f_n(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ldots(x+n)}$, et on note D_{f_n} son ensemble de définition.

1. Déterminer D_{f_n}.
2. Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\lim\limits_{x \to -k} (x+k) f_n(x)$. On note cette limite $a_{k,n}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels distincts, et $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ des réels quelconques. Montrer par récurrence qu'il existe $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ des réels vérifiant pour tout x tel que l'expression suivante ait un sens,

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 x + \ldots + \lambda_n x^{n-1}}{(x - x_1)\ldots(x - x_n)} = \frac{\alpha_1}{x - x_1} + \frac{\alpha_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x - x_n}.$$

4. Montrer que pour tout $x \in D_{f_n}$, $f_n(x) = \dfrac{a_{1,n}}{x+1} + \dfrac{a_{2,n}}{x+2} + \ldots + \dfrac{a_{n,n}}{x+n}$.
5. Donner une primitive de f_n. On la note F_n.
6. Déterminer l'ensemble de définition de F_n. On le note D_{F_n}.
7. On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation différentielle suivante :

$$(E_n) \qquad y' = f_n(x) y.$$

   Montrer que si une fonction ψ est solution de l'équation différentielle $y' = y$, alors la fonction ϕ_n définie par $\phi_n(x) = \psi(F_n(x))$ sur D_{F_n} est solution de (E_n) sur chaque intervalle de D_{F_n}.
8. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y' = y$.
9. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_n) sur chaque intervalle de D_{F_n}.

Exercice 2 : 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm).
On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

1. On considère la rotation r du plan d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre O.
   (a) Quelle est l'écriture complexe de cette rotation ?
   (b) Montrer que l'affixe z_B du point B image de A par r est $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Placer B.
   (c) Montrer que l'affixe z_C du point C image de B par r est $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Placer C.
2. On considère maintenant la transformation f qui à tout point M d'affixe z non nulle du plan, associe le point d'affixe $\frac{1}{\bar{z}}$.
   (a) On désigne par a et b deux réels tels que $z = a + bi$. Exprimer l'affixe z' du point M' image de M par f en fonction de a et de b.
   (b) Est-ce que f conserve les longueurs ? Justifier.
   (c) Est-ce que f conserve les rapports de longueurs ? Justifier.
   (d) Soit r' la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Soit D le point d'affixe 2, E le point d'affixe z_E image de D par r', et F le point d'affixe z_F image de E par r'. Calculer les affixes de E et de F. Placer D, E et F.
   (e) Calculer les affixes $z_{D'}$, $z_{E'}$ et $z_{F'}$ des points D', E' et F' images respectives de D, E et F par la transformation f. Placer les points D', E' et F'.
   (f) Démontrer que les points D', E' et F' sont alignés.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Quelle est l'image du disque de centre 0 et de rayon 1 privé du point O par f ?

Exercice 3 : 7 points

Commun à tous les candidats

L'objet de cet exercice est d'étudier une suite dont on ne connaît pas d'expression explicite.

Partie 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $e^x + \ln(x) = n$ admet une unique solution réelle.
   On étudiera pour cela la fonction f_n définie par $f_n(x) = e^x + \ln(x) - n$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par x_n l'unique solution de $e^x + \ln(x) = n$. On définit ainsi une suite (x_n) dont on n'a pas d'expression explicite. On définit également les fonctions f_n comme ci-dessus. Calculer $f_n(x_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dresser le tableau de variations de f_n.
4. En déduire que (x_n) est strictement croissante. Quelle est la limite de (x_n) ?

Partie 2

On pose $E = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. *Restitution organisée de connaissances*
   Énoncer précisément le théorème d'encadrement (aussi appelé théorème des gendarmes), et le démontrer.
2. Montrer que pour tout $n \in E$, $\ln(\ln(n) - \ln(\ln(n))) \leqslant \ln(n)$ (on remarquera que la fonction ln est strictement croissante sur son ensemble de définition).
3. Montrer que pour tout $n \in E$, x_n vérifie $\ln(n) - \ln(\ln(n)) \leqslant x_n \leqslant \ln(n)$.
4. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{\ln(n)} = 1$.
5. Pour tout $n \in E$, on pose $\varepsilon_n = x_n - \ln(n)$. Montrer que $\varepsilon_n = \ln\left(1 - \dfrac{\ln(x_n)}{n}\right)$.
6. Pouvait-on prévoir le signe de ε_n avant la question 5. ?
7. *Dans cette question, toute trace de recherche, même infructueuse sera prise en compte dans la notation.*
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{-n\varepsilon_n}{\ln(\ln(n))} = 1$.
8. À l'aide de la calculatrice, évaluer à 10^{-1} près x_{10}, x_{250} et x_{1000}. Comparer ces valeurs à $\ln(10) - \dfrac{\ln(\ln(10))}{10}$, $\ln(250) - \dfrac{\ln(\ln(250))}{250}$ et à $\ln(1000) - \dfrac{\ln(\ln(1000))}{1000}$. Conclure.

Exercice 4 : 3 points

Commun à tous les candidats

Une urne contient trois boules blanches, deux boules noires, et n boules grises, avec n supérieur ou égal à 2. On tire deux boules simultanément.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ?
2. Sans remettre les deux boules dans l'urne, on tire une boule. Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas grise, sachant que les deux boules tirées et retirées de l'urne sont blanches ?
3. On remet toutes les boules dans l'urne. On tire deux boules. On remet une boule grise dans l'urne si on en a tiré au moins une, sinon on garde nos deux boules. On tire encore une boule. Quelle est la probabilité qu'il reste n boules grises dans l'urne ?
4. On suppose maintenant que $n = 10$. Un joueur mise 30 € et tire une boule. Il lance ensuite un dé. S'il a tiré une boule grise, et qu'il fait un six, alors il gagne 80 €. S'il a tiré une boule noire et qu'il a fait un nombre impair, alors il gagne 50 €. S'il tire une boule blanche et qu'il fait un nombre pair, alors il gagne 35 €. Dans les autres cas, il ne gagne rien.
   (a) Calculer la probabilité qu'il gagne 80 €, la probabilité qu'il gagne 50 €, et la probabilité qu'il gagne 35 €. En déduire la probabilité qu'il ne gagne rien.
   (b) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le gain total du joueur (la différence entre ce qu'il gagne et ce qu'il mise). Déterminer la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer l'espérance de X.