Exercice 1 (4 points)

PARTIE A

1. A est une constante et f est la fonction définie sur l'ensemble des réels pour tout x réel par $f(x) = \ln(4x^2+A)$.

La définition de f sur l'ensemble des réels implique x < 0 pour f appartenant à]-infini;0[et x > 0 pour f appartenant à]0;+infini[. (étant donnée la fonction logarithmique).

a. f est une fonction dérivable sur le domaine de définition précédemment donné.

Calculons la dérivée de la fonction f sur son domaine de définition pour tout x réel.

$$\boxed{f'(x) = u'/u = 8x / (4x^2+A)}$$

Étudions les variations de cette fonction sur son domaine de définition pour tout x réel.

Les signes :

8x = 0 soit x = 0 donc 8x est positif pour x > 0, nul pour x = 0 et négatif pour x < 0

$4x^2+A = 0$ avec A une constante, soit delta = -4(4)(A) = -16A

soit -16A est positif pour A < 0, nul pour A = 0 et négatif pour A > 0.

Deux solutions pour A < 0 qui sont :

$$- \quad \frac{-\sqrt{-16A}}{8} \quad \text{Pour A < 0}$$

$$- \quad \frac{\sqrt{-16A}}{8} \quad \text{pour A < 0}$$

Une seule solution pour A = 0 qui est :

$$\frac{-b}{2a} = 0 \text{ (b est inexistant)}$$

Aucune solution dans l'ensemble des réels pour A > 0.

Les variations avec A négatif :

- f est strictement décroissante de -infini jusqu'à $\frac{-\sqrt{-16A}}{8}$;
- f n'est pas continue entre $\frac{-\sqrt{-16A}}{8}$ et $\frac{\sqrt{-16A}}{8}$;
- f est strictement croissante après $\frac{\sqrt{-16A}}{8}$ jusqu'à +infini ;

Les variations avec A nul : $f(x) = \ln(4x^2)$

- f est strictement décroissante de -infini à 0 exclu ;
- f n'est pas continue en 0 ;
- f est strictement croissante de 0 exclu à +infini.

Les variations avec A positif :

- f est strictement décroissante de -infini à 0 ;
- f est strictement croissante de 0 à +infini.

b. Étant donné l'étude de la question précédente et des variations de la fonction f alors f est continue sur l'ensemble des réels si et seulement si A > 0.
c. Étant donné l'étude de la question 1.a. et des variations de la fonction f alors si A augmente on peut conjecturer et dire que les variations de la fonction f concernent sa continuité. La fonction f est davantage continue sur l'ensemble des réels quand A augmente.

PARTIE B

2. A est une deuxième variable, avec la fonction f définie sur l'ensemble des réels par $f(x,A) = \ln(4x^2+A)$.
a. Étudions les variations de la fonction à deux variables réelles sur l'ensemble des réels.
Pour cela déterminons les dérivées partielles de la fonction f à deux variables réelles.
D'après le théorème de Schwarz alors on a :

$$\frac{\partial x}{\partial A} = \frac{\partial \frac{8x}{4x^2+A}}{\partial \frac{1}{4x^2+A}}$$

Les signes :

Signes de 8x et de $4x^2+A$ (voir question 1.a.)
1 est une constante, donc toujours positive

Les variations de f :

f est strictement décroissante de -infini jusqu'à $\frac{-\sqrt{-16A}}{8}$ (surface plane du repère tridimensionnel) ;
f n'est pas continue entre $\frac{-\sqrt{-16A}}{8}$ et 1 (surface quadratique du repère tridimensionnel).

b. Pour $x > 0$ et $A < 0$ f est continue sur l'ensemble des réels.

c. Si x augmente et A diminue alors f décroît ;
Si x diminue et A augmente alors f décroît ;
Si x augmente et A augmente alors f croît ;
Si x diminue et A diminue alors f croît.

PARTIE C : démonstration des conjectures

3. Démonstration de la conjecture de la partie A et de la partie B :

f continue quand A augmente :

Raisonnons par l'absurde.
Supposons vraie la déclaration suivante : « f n'est pas continue quand A augmente.»
Si f n'est pas continue cela implique que f varie entre les valeurs $\frac{-\sqrt{-16A}}{8}$ et $\frac{\sqrt{-16A}}{8}$ quand A augmente.
Or d'après la question 1.a. f ne varie pas entre ces deux valeurs quand A augmente donc la déclaration est fausse.
Par conséquent f est continue quand A augmente.

Si x augmente et A diminue alors f décroît :

$x > 0$ et $A < 0$ alors f est continue sur l'ensemble des réels d'après la question 2.b.
Ces valeurs conjointes de A et de x permettent d'écrire le principe suivant :
« la surface quadratique du repère tridimensionnel n'est pas continue quand x augmente et quand A diminue en même temps. »
Par conséquent nous pouvons dire que si x augmente et A diminue alors f décroît.

Si x diminue et A augmente alors f décroît :

Même raisonnement sauf que nous pouvons dire : « la surface quadratique du repère tridimensionnel est continue quand x diminue et quand A augmente en même temps. »
Par conséquent nous pouvons dire que si x diminue et A augmente alors f décroît.

Si x augmente et A augmente alors f croît :

Même raisonnement sauf que nous pouvons dire : « la surface plane du repère tridimensionnel n'est pas continue quand x augmente et quand A augmente en même temps. »
Par conséquent nous pouvons dire que si x augmente et A augmente alors f croît.

Si x diminue et A diminue alors f croît :

Même raisonnement sauf que nous pouvons dire : « la surface plane du repère tridimensionnel est continue quand x diminue et quand A diminue en même temps.»
Par conséquent nous pouvons dire que si x diminue et A diminue alors f croît.

Exercice 2 (5 points)

PARTIE A : étude de la fonction complexe

1. Soit f la fonction complexe définie par f(i,x) = 3i² + 5cos(2x).

a. La fonction f est définie sur l'ensemble des complexes compris entre -5i et 5i (étant donnée l'expression cosinus de la fonction).

b. Calculons la dérivée de la fonction complexe holomorphe sur son ensemble de définition.

La fonction f est supposée strictement dérivable sur son ensemble de définition.

On a:

$$f'(i,x) = e^{Réé(f(i,x))+\Im(f(i,x))} = e^{5\cos(2x)+3i^2}$$

<u>Les signes :</u>

Par composition de $e^{5\cos(2x)+3i^2}$ on a :

- 3i² négatif, il s'agit d'une constante qui vaut -3. Appelons A ;
- 5cos(2x) compris entre -5 et 5. Appelons B ;
- L'expression exponentielle e^{A+B} par composition est donc toujours positive étant données les propriétés de la fonction exponentielle.

<u>Les variations :</u>

Donc d'après l'étude de la dérivée complexe f est strictement croissante sur son domaine de définition.

c. f(i,2) = 3i² + 5cos(4) = -6.27. On note ce résultat l'image de f.

d. L'image conjuguée de f est 6.27.

Posons alors l'équation complexe 3i² + 5cos(2x) = 6.27

La résolution de cette équation donne comme valeurs de x :

$$\frac{1}{2}(2\prod n - \arccos(\frac{927}{500}))$$ Avec n appartenant aux entiers relatifs.

$$\frac{1}{2}(2\prod n + \arccos(\frac{927}{500}))$$ Avec n appartenant aux entiers relatifs.

Pour ces deux valeurs de x on trouve l'image conjuguée de l'image précédemment déterminée.

PARTIE B : étude de l'équation linéaire complexe

2. A(i) = $4i^2 + \cos(2i) - 6$ avec A(i) une image retournée par la fonction holomorphe étudiée précédemment.

a. $A(f(i,2)) = A(-6.27) = 4(-6.27)^2 + \cos(2*(-6.27)) - 6$

$A(f(i,2)) = 157.25 + 1 - 6 = 152.25$

b. L'équation A(f(i,2)) est $152.25 = 4i^2 + \cos(2i) - 6$

L'ensemble solution est une droite qui passe par l'origine et par le point A(152.25 ; 0).

c. Déterminons la forme de l'équation A(f(i)).

$A(f(i)) = 4(4i^2+\cos(2i)) + \cos(2(4i^2+\cos(2i)))$

$A(f(i)) = 16i^2 + 4\cos(2i) + \cos(8i^2+2\cos(2i))$

L'équation A(f(i)) est donc $A(f(i)) = 16i^2 + 4\cos(2i) + \cos(8i^2+2\cos(2i))$

L'ensemble solution est un cercle ayant pour centre l'image A(f(i)) et pour rayon $R = 16i^2 + 4\cos(2i) + \cos(8i^2+2\cos(2i))$.

d. Non car l'équation A(f(i)) n'est pas de la même forme que l'équation A(i). Cela aurait été possible si A(f(i)) = 4A(i) or ici le coefficient n'est pas respecté.

Exercice 3 (6 points)

1. Soit la fonction f définie sur D par f(x) = 2x

2*0 = 0 (événement impossible)

2*0.5 = 1 (événement certain)

Pour que la probabilité soit compris entre 0 inclus et 1 inclus il faut donc que x soit compris entre 0 inclus et 0.5 inclus.

Donc D = [0;0.5].

2. Calculons la dérivée de la fonction f.

f'(x) = 2

2 est une constante, toujours positive.

Donc f est strictement croissante sur son domaine de définition.

3.

a. Résolvons l'équation 2x = 0.4

x = 0.2

Donc x doit valoir 0.2 pour tomber sur une probabilité de 0.4

b. D'après la question précédente alors la deuxième probabilité à déterminer vaut aussi 0.4

4. f(x) = 2x * 100

a. x appartient à D.

Faisons des tests de valeurs de x et vérifions que le résultat final est bien un nombre compris entre 1 et 100.

f(0) = 0

f(0.005) = 0.010 * 100 = 1

f(0.1) = 0.2 * 100 = 20

f(0.3) = 0.6 * 100 = 60

f(0.5) = 1 * 100 = 100

Il n'est donc pas exact de dire que pour tout x du domaine de définition le résultat final est un nombre compris entre 1 et 100.

Ainsi pour x appartenant au domaine de définition [0,005;0.5] le résultat final est un nombre compris entre 1 et 100.

b. $f(0.5) = 1 * 100 = 100$

Et $0.5 / 100 = 0.005$

et $f(0.005) = 0.01 * 100 = 1$

Étudions les variations de la fonction f définie par $f(x) = 2x * 100$ sur [0,005;0,5].

Simplifions l'expression de la fonction qui vaut $f(x) = 200x$.

La dérivée vaut donc $f'(x) = 200$

200 est une constante positive donc la fonction f est strictement croissante sur [0,005;0,5].

La fonction f est également continue sur [0,005;0,5].

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique solution a telle que f(a) soit compris entre 1 et 100 inclus.

Exercice 4 (5 points)

Exercice de spécialité mathématiques

1. Soit la fonction complexe y(x,i) = 2x + 3cos(i)

a. y(0,i) = 3cos(i)

b. Si x = 0 alors la fonction y retourne une image imaginaire pure.

c. y'(x,i) = $e^{2x+3\cos(i)}$ (première dérivation)

y''(x,i) = $e^{e^{2x+3\cos(i)}}$ (seconde dérivation, double exponentielle)

d. 2y' + y'' = 4y (E)

Remplaçons :

2($e^{2x+3\cos(i)}$) + $e^{e^{2x+3\cos(i)}}$ = 4(2x + 3cos(i))

2 $e^{2x+3\cos(i)}$ + $e^{e^{2x+3\cos(i)}}$ = 8x+12cos(i)

Trouvons une solution particulière de cette équation pour x = 0.

$$2e^{0}+e^{e^{0}}=8\mathrm{x}+12\cos(i)$$

$$2+2.71=8\mathrm{x}+12\cos(i)$$

$$4.71=8\mathrm{x}+12\cos(i)$$

Une solution particulière de cette équation complexe est environ -1.72 (après résolution).

e. Trouvons toutes les solutions de l'équation complexe :

$$2e^{2\mathrm{x}+3\cos(i)}+e^{e^{2\mathrm{x}+3\cos(i)}}=8\mathrm{x}+12\cos(i)$$

D'après la question précédente une solution particulière est -1.72.

Toutes les solutions sont données en remplaçant x par -1.72, soit :

$$2e^{2*(-1.72)+3\cos(i)}+e^{e^{2*(-1.72)+3\cos(i)}}=8\mathrm{x}+12\cos(i)$$

$$2e^{-3.44+3\cos(i)}+e^{e^{-3.44+3\cos(i)}}=8\mathrm{x}+12\cos(i)$$

Toutes les solutions de cette équation sont les couples solution suivants :

$S = \{-1.72\text{n}\, ; -3.44\text{k}\}\, avec\, n\, et\, k \in \mathbb{Z}$

2. y'+0.5y'' = 2y (E')

a. (E) = 2 (E')

b. D'après la réponse à la question 1.d. alors une solution particulière de l'équation (E') est -1.72 / 2 = -0.86

c. D'après la réponse à la question 1.e. alors toutes les solutions de l'équation (E') sont tous les couples :

$S = \{-0.86\text{n}\, ; -1.72\text{k}\}\, avec\, n\, et\, k \in \mathbb{Z}$