

Institut Supérieur des Études Technologiques de Radès
Département de Génie Électrique

Électronique de Communication

*Support de cours
et exercices corrigés*

*3^{ème} niveau Génie Électrique
Option Électronique*

Dr J.Y. HAGGÈGE
*Ingénieur ENIT
Agrégé de Génie Électrique
Technologue à l'ISSET de Radès*

2004

Table des matières

1	Les signaux	1
1.1	Définitions	1
1.1.1	Signal	1
1.1.2	Représentation mathématique d'un signal	1
1.2	Classification des signaux	1
1.3	Les signaux périodiques	2
1.3.1	Définitions	2
1.3.2	Signaux sinusoïdaux	2
1.4	Spectre d'un signal périodique	3
1.4.1	Développement en série de Fourier	3
1.4.2	Représentation spectrale d'un signal périodique	4
1.4.3	Exemple de calcul du spectre d'un signal périodique	5
1.5	Généralisation de la notion de spectre	6
1.5.1	Spectre d'un signal non périodique	6
1.5.2	Exemple de calcul du spectre d'un signal non périodique	7
1.5.3	Calcul de la puissance d'un signal à partir de son spectre	8
1.5.4	Spectre des signaux utilisés en télécommunications	8
1.6	Filtrage des signaux	9
1.6.1	Principe	9
1.6.2	Exemples de filtres	9
2	La modulation d'amplitude	11
2.1	But d'une modulation	11
2.2	La modulation AM Double Bande Sans Porteuse	13
2.2.1	Principe	13
2.2.2	Cas d'un signal modulant sinusoïdal	13
2.2.3	Cas d'un signal modulant quelconque	14
2.3	Génération du signal AM DBSP	15
2.3.1	Utilisation de circuit intégrés spécialisés	16
2.3.2	Modulateur en anneau	16
2.4	Démodulation des signaux AM DBSP	19
2.4.1	Principe	19
2.4.2	Représentation spectrale	20
2.4.3	Problème de la démodulation du signal AM DBSP	20
2.5	La modulation AM Double Bande Avec Porteuse	21

2.5.1	Principe	21
2.5.2	Représentation temporelle du signal AM DBAP	21
2.5.3	Représentation spectrale du signal AM DBAP	22
2.5.4	Puissance d'un signal AM DBAP	23
2.6	Génération du signal AM DBAP	24
2.6.1	Méthode directe	24
2.6.2	Utilisation d'une non linéarité	24
2.6.3	Amplificateur à gain variable	26
2.7	Démodulation des signaux AM DBAP	27
2.7.1	Démodulation cohérente	27
2.7.2	Démodulation AM par détection d'enveloppe	28
2.8	La modulation AM à Bande Latérale Unique	30
2.8.1	Principe	30
2.8.2	Caractéristiques du signal BLU	31
2.8.3	Génération du signal BLU par filtrage passe-bande	31
2.8.4	Génération du signal BLU par la méthode du déphasage	33
2.8.5	Démodulation du signal BLU	34
2.9	La modulation AM à Bande Latérale Résiduelle	34
2.10	Exercices	35
2.10.1	Modulateur AM à non linéarité cubique	35
2.10.2	Modulation d'amplitude en quadrature (QAM)	36
2.10.3	Démodulation quadratique	38
2.10.4	Codage et décodage stéréophonique	39
2.10.5	Cryptage par inversion de spectre	40
2.10.6	Puissance d'un signal AM	41
3	La modulation de fréquence	43
3.1	Définitions	43
3.2	Caractéristiques de la modulation de fréquence	44
3.3	Analyse spectrale du signal FM	45
3.3.1	Développement en série de Fourier d'un signal FM	45
3.3.2	Les fonctions de Bessel de première espèce	45
3.3.3	Représentation spectrale du signal FM	48
3.3.4	Occupation spectrale utile du signal FM	49
3.3.5	Généralisation	50
3.4	Génération du signal FM	50
3.4.1	Principe	50
3.4.2	Méthode par variation de paramètres	51
3.4.3	Modulateur d'Armstrong	53
3.5	Démodulation des signaux FM	55
3.5.1	Discriminateur	55
3.5.2	Boucle à verrouillage de phase	57
3.6	Les récepteurs à changement de fréquence	59
3.7	La modulation de phase	60

3.7.1	Principe	60
3.7.2	Occupation spectrale du signal PM	61
3.8	Exercices	61
3.8.1	Mesure de la sensibilité d'un modulateur de fréquence	61
3.8.2	Modulateur FM à diode varicap	62
3.8.3	Démodulateur FM quadratique	65
3.8.4	Synthèse d'une PLL	68
Bibliographie		71

Chapitre 1

Les signaux

1.1 Définitions

1.1.1 Signal

Un signal est le support physique d'une information. Exemples :

- signaux sonores : fluctuations de la pression de l'air transportant un message à notre oreille ;
- signaux visuels : ondes de lumière apportant une information à notre œil.

En télécommunications, on appelle *signal* tout phénomène électromagnétique, généralement de faible niveau, qui constitue le support d'une information. Exemple : tension modulée en fréquence ou en amplitude.

1.1.2 Représentation mathématique d'un signal

Un signal est représenté par une fonction d'une ou plusieurs variables. Généralement, une seule variable est utilisée : *le temps* car l'information transportée par un signal est la variation d'une grandeur au cours du temps.

Notation des signaux : $x(t)$, $y(t)$, $s(t)$, ...

Exemples de signaux :

- $x(t) = A$ (signal constant)
- $y(t) = at + b$
- $s(t) = s_0 e^{at}$

Ces fonctions constituent une idéalisation mathématique des signaux réels.

1.2 Classification des signaux

Les signaux peuvent être classés en deux catégories :

- signaux déterministes :
 - analogiques : amplitude et temps continus, images exactes des informations à transmettre ;

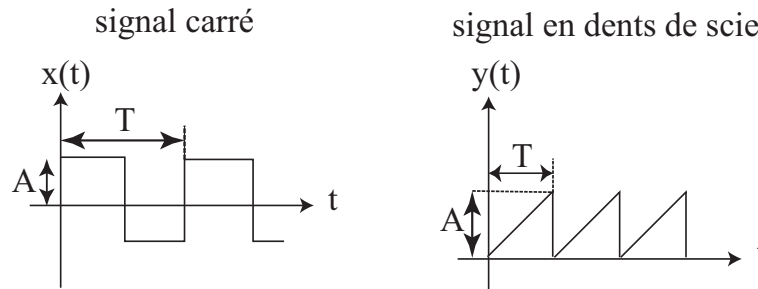
- numériques : amplitude et temps discrets, obtenus par passage de l'information par un convertisseur analogique/numérique ou signaux naturellement numériques provenant d'un ordinateur.
 - signaux aléatoires : étudiés en utilisant la théorie des probabilités et des processus aléatoires. Ils permettent de mieux représenter les signaux réels.
- Conséquence : il y a deux types de transmission des signaux : transmission *analogique* et transmission *numérique*.

1.3 Les signaux périodiques

1.3.1 Définitions

Un signal $x(t)$ est périodique s'il existe une durée T telle que $x(t + T) = x(t)$.

Exemples :



Un signal périodique $x(t)$ est caractérisé par :

- son amplitude A ;
- sa période T (en secondes) ou sa fréquence $f = \frac{1}{T}$ (en Hertz) ;
- sa puissance moyenne $P = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt$;
- sa valeur moyenne (composante continue) : $X_m = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$.

1.3.2 Signaux sinusoïdaux

Les signaux sinusoïdaux (ou harmoniques) sont des signaux périodiques très importants. Ce sont les signaux de la forme :

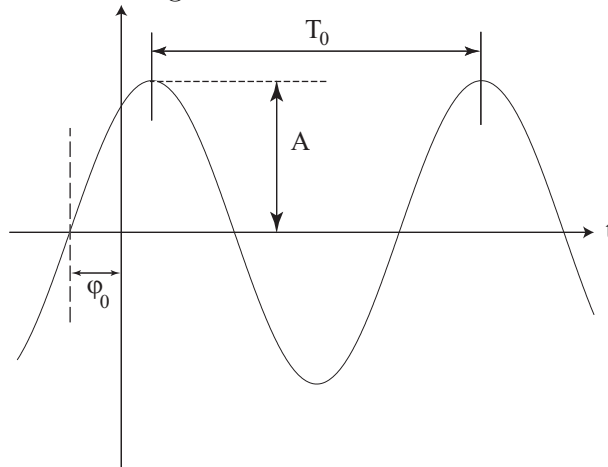
$$x(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

avec :

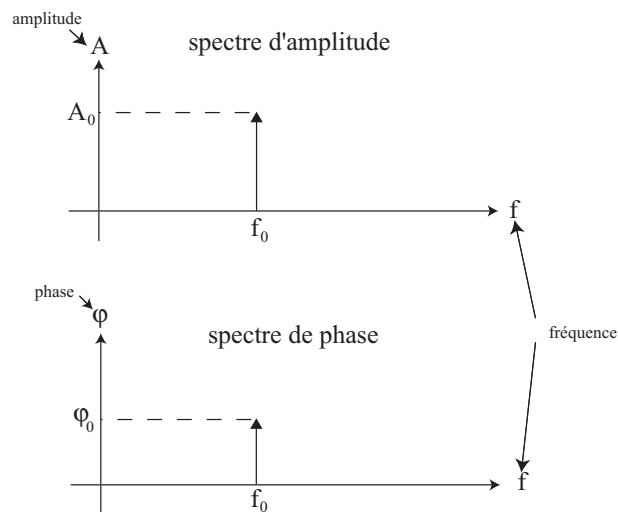
- A_0 : amplitude ;
- f_0 : fréquence ;
- φ_0 : phase à l'origine (ou déphasage ou phase) ;
- $2\pi f_0 t + \varphi_0$: phase instantannée.

Puissance d'un signal sinusoïdal : $P = \frac{A^2}{2}$.

Représentation temporelle d'un signal sinusoïdal :



Autre représentation d'un signal sinusoïdal : c'est la *représentation spectrale* :



1.4 Spectre d'un signal périodique

1.4.1 Développement en série de Fourier

Soit $x(t)$ un signal périodique quelconque (non sinusoïdal) de période T (ou de fréquence $f = \frac{1}{T}$). On montre que $x(t)$ peut s'écrire sous la forme d'un *développement en série de Fourier*, c'est-à-dire une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples entiers de f :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi nft + b_n \sin 2\pi nft$$

avec :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

et $\forall n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos 2\pi n f t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin 2\pi n f t \, dt$$

Le signal sinusoïdal de fréquence f est appelé *fondamental* et les signaux sinusoïdaux de fréquences nf , $n \geq 2$ sont appelés *harmoniques*.

Si $x(t)$ est impair (c'est-à-dire $x(-t) = -x(t)$), alors $\forall n > 0$, $a_n = 0$, et si $x(t)$ est pair (c'est-à-dire $x(-t) = x(t)$) alors $\forall n > 1$, $b_n = 0$.

1.4.2 Représentation spectrale d'un signal périodique

Le développement en série de Fourier d'un signal périodique $x(t)$ peut également s'écrire sous la forme :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_x(n) \cos(2\pi n f t + \varphi_x(n))$$

avec :

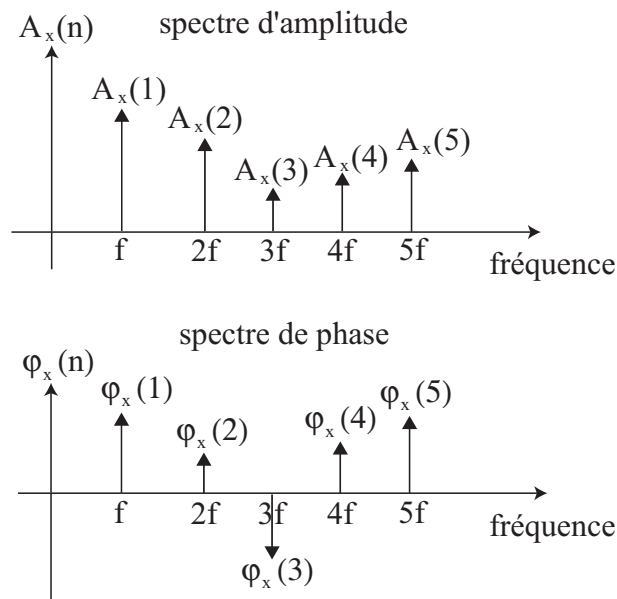
$$A_x(n) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

et :

$$\varphi_x(n) = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$$

$A_x(n)$ et $\varphi_x(n)$ représentent respectivement le spectre d'amplitude et le spectre de phase de $x(t)$. Ce sont des *spectres de raies* ou *spectres discrets* : un signal périodique ne possède de composantes spectrales que pour des fréquences multiples entiers du fondamental.

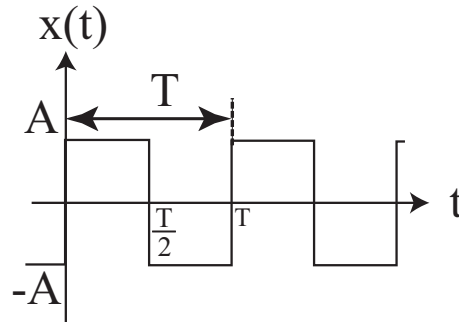
Représentation graphique :



En pratique, le spectre d'un signal est visualisé au moyen d'un *analyseur de spectre*.

1.4.3 Exemple de calcul du spectre d'un signal périodique

On considère un signal carré bipolaire :



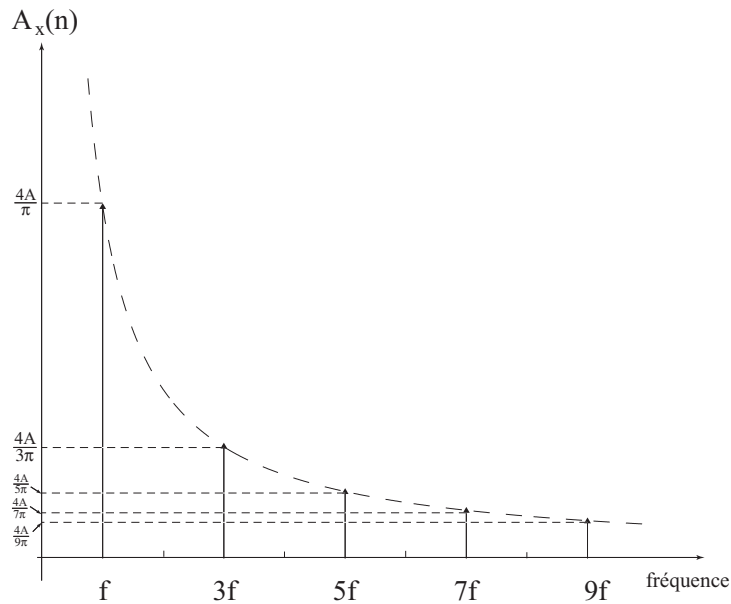
$$x(t) \text{ est impair} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_0}{2} = 0 \\ \forall n \geq 1, a_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin \frac{2\pi n t}{T} dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T -A \sin \frac{2\pi n t}{T} dt \\ &= \frac{2}{T} A \frac{T}{2\pi n} \left[-\cos \frac{2\pi n t}{T} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T} A \frac{T}{2\pi n} \left[-\cos \frac{2\pi n t}{T} \right]_{\frac{T}{2}}^T \\ &= -\frac{A}{\pi n} [(-1)^n - 1] + \frac{A}{\pi n} [1 - (-1)^n] \\ &= \frac{2A}{\pi n} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \frac{4A}{\pi n} & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, le développement en série de Fourier de $x(t)$ est :

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin \frac{2\pi(2p+1)t}{T}$$

Représentation graphique :



1.5 Généralisation de la notion de spectre

1.5.1 Spectre d'un signal non périodique

Soit $x(t)$ un signal quelconque, en particulier non périodique. On montre dans ce cas que le spectre de $x(t)$ est une fonction continue de la fréquence, c'est-à-dire que $x(t)$ possède des composantes spectrales à toutes les fréquences. Le signal $x(t)$ peut alors s'écrire sous la forme :

$$x(t) = \int_0^{+\infty} A_x(f) \cos(2\pi ft + \varphi_x(f)) df$$

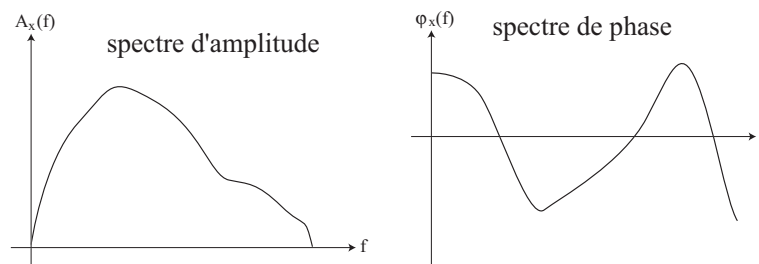
avec :

$$\begin{cases} A_x(f) = 2 |X(f)| & : \text{spectre d'amplitude} \\ \varphi_x(f) = \arg X(f) & : \text{spectre de phase} \end{cases}$$

où $X(f)$ est la *transformée de Fourier* de $x(t)$ définie par :

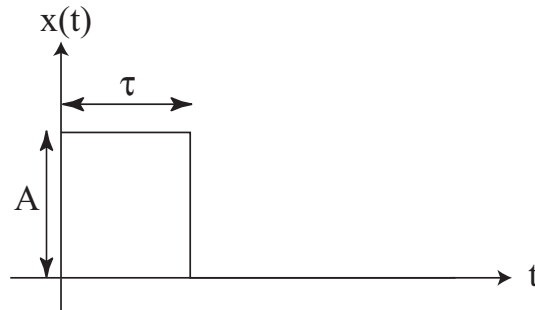
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Contrairement aux signaux périodiques, les signaux non périodiques possèdent donc un spectre *continu* :



1.5.2 Exemple de calcul du spectre d'un signal non périodique

Soit une impulsion $x(t)$ de durée τ et d'amplitude A :



$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \int_0^{\tau} A e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{A}{j2\pi f} \left[e^{-j2\pi f t} \right]_0^{\tau} = -\frac{A}{j2\pi f} \left[e^{-j2\pi f \tau} - 1 \right]$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} \left[1 - e^{-j2\pi f \tau} \right] = \frac{A}{j2\pi f} e^{-j\pi f \tau} \left[e^{j\pi f \tau} - e^{-j\pi f \tau} \right] = \frac{A}{\pi f} e^{-j\pi f \tau} \sin \pi f \tau = A\tau \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} e^{-j\pi f \tau}$$

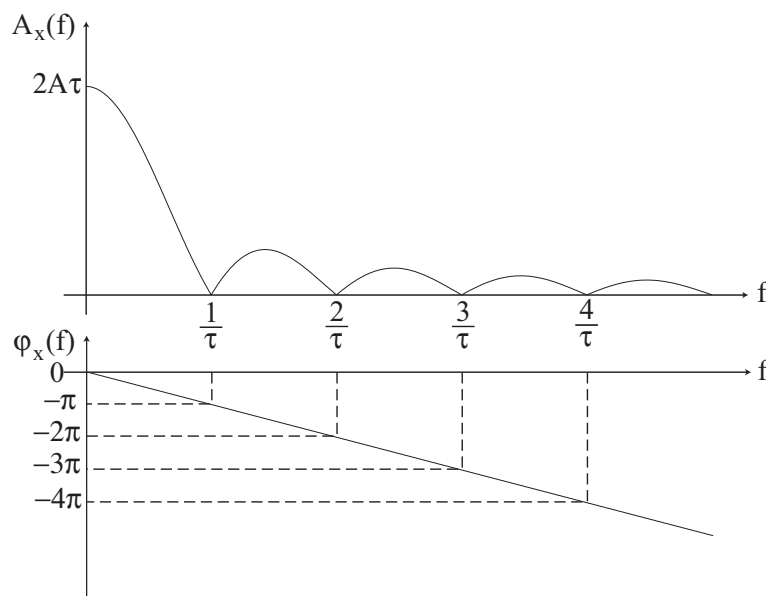
Ainsi :

$$A_x(f) = 2 |X(f)| = 2A\tau \left| \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \right|$$

et :

$$\varphi_x(f) = \arg X(f) = -\pi f \tau$$

Représentation graphique :



1.5.3 Calcul de la puissance d'un signal à partir de son spectre

La puissance d'un signal est égale à la somme des puissances des composantes de son spectre d'amplitude.

Dans le cas d'un signal $x(t)$ périodique dont le développement en série de Fourier s'écrit :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_x(n) \cos(2\pi nft + \varphi_x(n))$$

la puissance moyenne est :

$$P = \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}_{\text{domaine temporel}} = \underbrace{\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_x(n)^2}{2}}_{\text{domaine spectral}} \quad (\text{égalité de Parseval})$$

Dans le cas d'un signal non périodique s'écrivant sous la forme :

$$x(t) = \int_0^{+\infty} A_x(f) \cos(2\pi ft + \varphi_x(f)) df$$

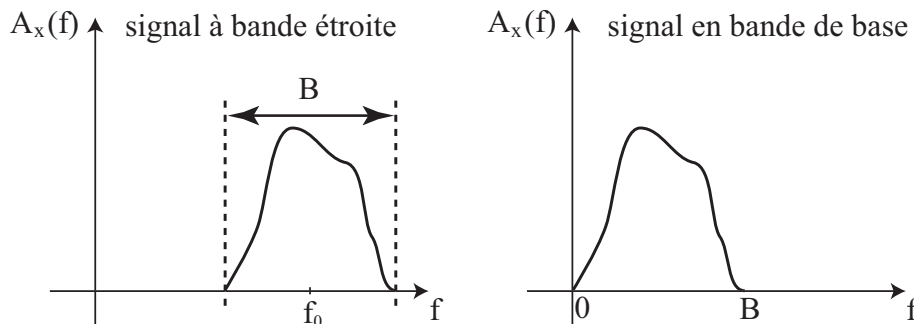
son énergie est :

$$\mathcal{E} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt}_{\text{domaine temporel}} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} A_x(f)^2 df}_{\text{domaine spectral}}$$

1.5.4 Spectre des signaux utilisés en télécommunications

Les signaux transmis par un système de télécommunications sont des signaux à *bande étroite*. Ces signaux possèdent un spectre nul en dehors d'un intervalle de largeur B , appelée *largeur de bande* ou *occupation spectrale* du signal.

Cet intervalle est généralement centré autour d'une fréquence f_0 appelée *fréquence centrale du signal*. S'il est de la forme $[0, B]$, alors le signal est appelé *signal en bande de base*.



La connaissance du spectre d'un signal permet de dimensionner les canaux de transmission.

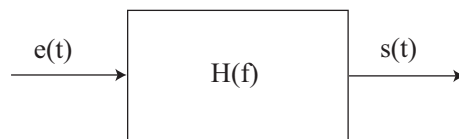
1.6 Filtrage des signaux

1.6.1 Principe

L'opération de filtrage d'un signal consiste à modifier le spectre de ce signal de manière à affaiblir certaines parties du spectre et/ou à en amplifier d'autres.

Dans le domaine spectral, le filtrage se traduit par la multiplication du spectre d'amplitude du signal par une fonction de la fréquence et de l'addition d'une autre fonction de la fréquence au spectre de phase du signal.

Soit un filtre de *fonction de transfert* $H(f)$ ($H(f)$ est une fonction complexe de f).



Si on injecte à l'entrée de ce filtre un signal $e(t)$ dont le spectre d'amplitude est $A_e(f)$ et le spectre de phase est $\varphi_e(f)$, alors les spectres d'amplitude et de phase du signal de sortie $s(t)$ sont respectivement :

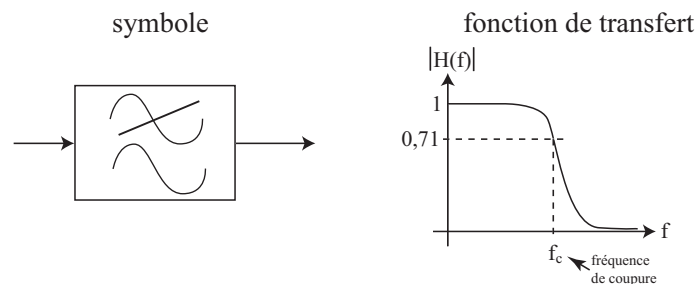
$$A_s(f) = |H(f)| \cdot A_e(f)$$

et

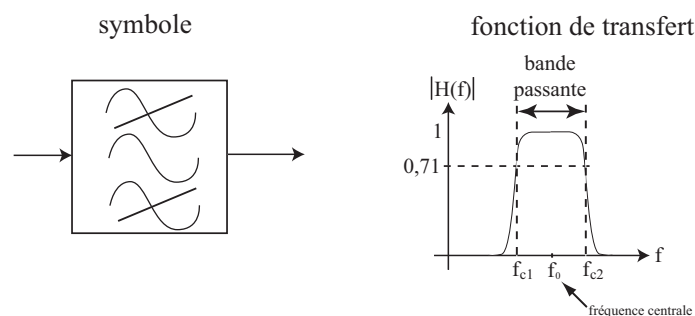
$$\varphi_s(f) = \varphi_e(f) + \arg H(f)$$

1.6.2 Exemples de filtres

Filtre passe-bas :



Filtre passe-bande :

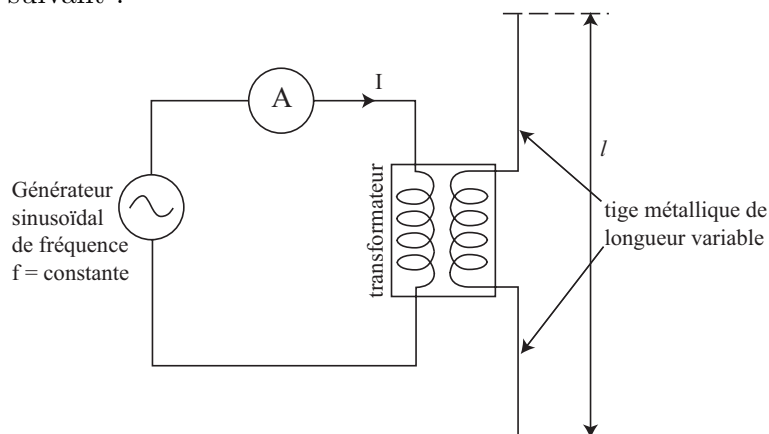


Chapitre 2

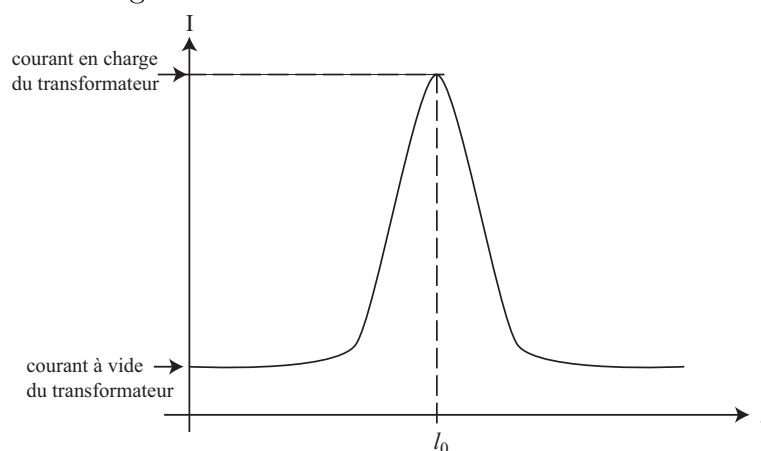
La modulation d'amplitude

2.1 But d'une modulation

Soit le montage suivant :



En faisant varier la longueur l de la tige métallique, on constate que pour une longueur l_0 , le courant débité par le générateur devient très supérieur au courant consommé par le primaire du transformateur à vide : tout se passe comme si le secondaire du transformateur était connecté à une charge.



Il y a donc un échange d'énergie entre le générateur et le milieu ambiant. Cet échange se

fait sous forme de *rayonnement électromagnétique*. La tige métallique joue le rôle d'une *antenne émettrice*.

On constate également que la longueur l_0 pour laquelle le rayonnement est maximal est liée à la fréquence f du générateur par la relation :

$$l_0 = \frac{\lambda}{2}$$

avec : $\lambda = \frac{c}{f}$ = longueur d'onde du signal produit par le générateur, c étant la vitesse de la lumière.

Exemple de calcul : si on veut transmettre un signal audio dont le spectre se situe autour de 10 kHz, la longueur de l'antenne doit être :

$$l = \frac{c}{2f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \times 10 \cdot 10^3} = 15\,000 \text{ m}$$

L'antenne doit avoir une longueur très grande : difficile en pratique. Pour diminuer la longueur de l'antenne, on doit augmenter la fréquence du signal à transmettre : on effectue un *décalage spectral vers les hautes fréquences* du signal : c'est la *modulation*.

Exemple : si l'émission se fait à la fréquence $f = 10$ MHz, la longueur de l'antenne devient :

$$l = \frac{c}{2f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \times 10 \cdot 10^6} = 15 \text{ m}$$

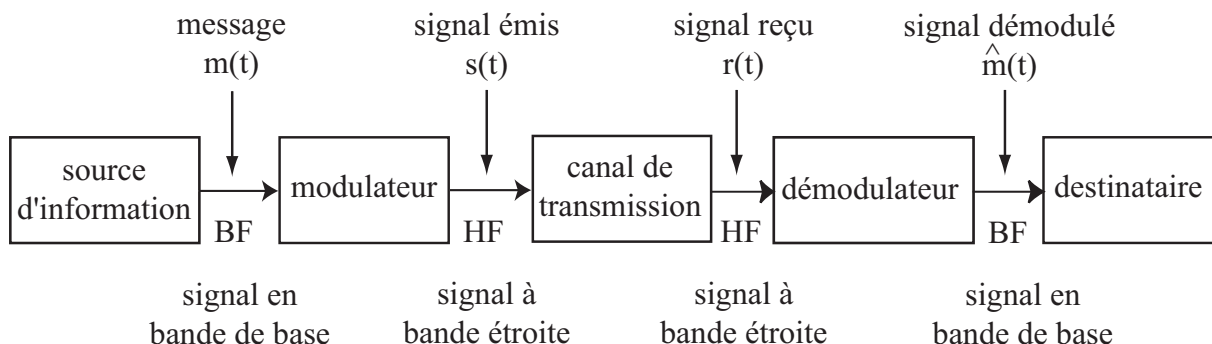
C'est une antenne réalisable pratiquement.

A la réception, le signal HF doit être ramené vers les basses fréquences : *décalage spectral vers les basses fréquences* du signal : c'est la *démodulation*.

Ainsi, les signaux basse fréquence (signaux audio) ne peuvent pas être directement transmis en bande de base car ils nécessitent de trop grandes antennes. Le but d'une modulation est donc de décaler le signal à émettre vers les hautes fréquences afin d'avoir des antennes émettrices de dimensions raisonnables.

La fréquence à laquelle se fait l'émission en HF est appelée *fréquence porteuse* car elle transporte l'information BF. Le signal transmis en HF est appelé *signal modulé*.

On en déduit le schéma synoptique d'une chaîne de transmission :



La méthode la plus simple de transposition spectrale est la *modulation d'amplitude* (ou *modulation linéaire*), notée AM (*Amplitude Modulation*). C'est la méthode utilisée pour les premières transmissions radio, dans les années 1920.

Il y a quatre types de modulations d'amplitude :

- AM *Double Bande Sans Porteuse* (DBSP) : utilisée pour le multiplexage fréquentiel et le cryptage analogique ;
- AM *Double Bande Avec Porteuse* (DBAP) : utilisée en radiodiffusion ;
- AM *Bande Latérale Unique* (BLU) : utilisée pour le multiplexage fréquentiel, la téléphonie, les radiocommunications militaires et marines ;
- AM *Bande Latérale Résiduelle* (BLR) : utilisée pour l'émission des signaux de télévision.

2.2 La modulation AM Double Bande Sans Porteuse

2.2.1 Principe

Soit un signal sinusoïdal haute fréquence $p(t) = \cos 2\pi f_0 t$, appelé *porteuse*. Le message $m(t)$ à transmettre est appelé *signal modulant*.

Le signal AM modulé en amplitude Double Bande Sans Porteuse (DBSP) s'écrit :

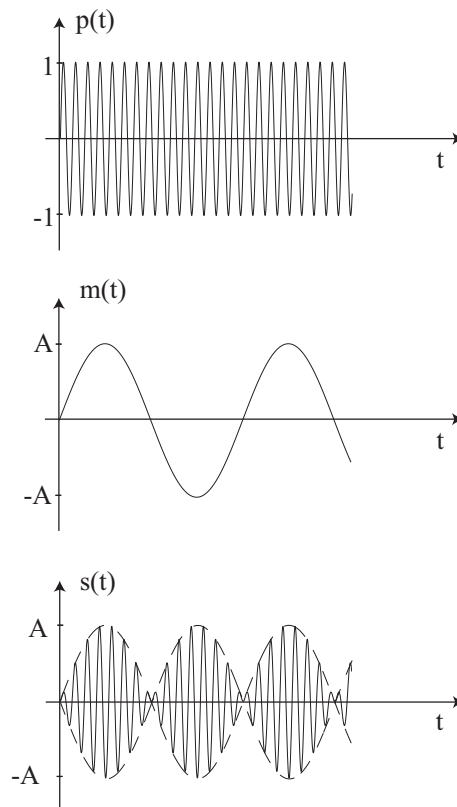
$$s(t) = p(t) \cdot m(t)$$

2.2.2 Cas d'un signal modulant sinusoïdal

On considère un signal modulant sinusoïdal $m(t) = A \cos 2\pi f_m t$ avec $f_m \ll f_0$. Le signal AM s'écrit alors :

$$s(t) = \cos 2\pi f_0 t \cdot A \cos 2\pi f_m t$$

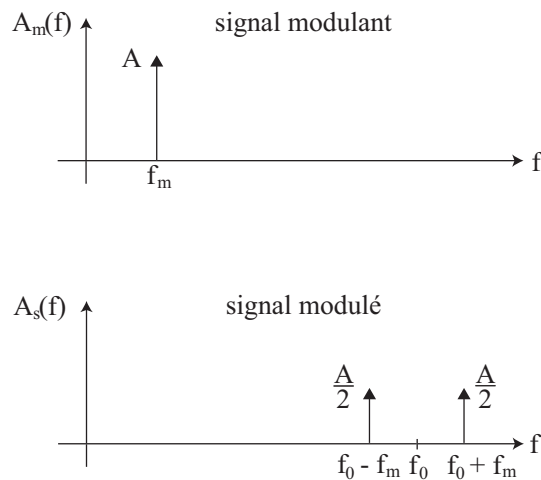
Représentation temporelle :



Représentation spectrale : pour déterminer le spectre de $s(t)$, il faut décomposer $s(t)$ en une somme de signaux sinusoïdaux. On a :

$$s(t) = \cos 2\pi f_0 t \cdot A \cos 2\pi f_m t = \frac{A}{2} \cos 2\pi(f_0 + f_m)t + \frac{A}{2} \cos 2\pi(f_0 - f_m)t$$

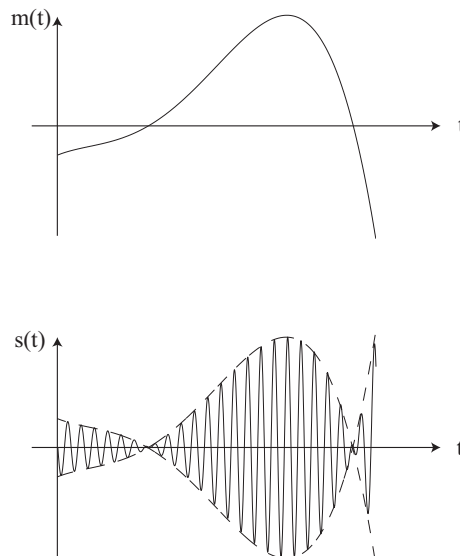
Le spectre d'amplitude du signal modulé $s(t)$ est donc constitué de deux raies symétriques situées aux fréquences $f_0 - f_m$ et $f_0 + f_m$. De plus, il n'y a pas de composante spectrale à la fréquence f_0 de la porteuse. L'allure du spectre d'amplitude du signal modulé justifie l'appellation *Double Bande Sans Porteuse*.



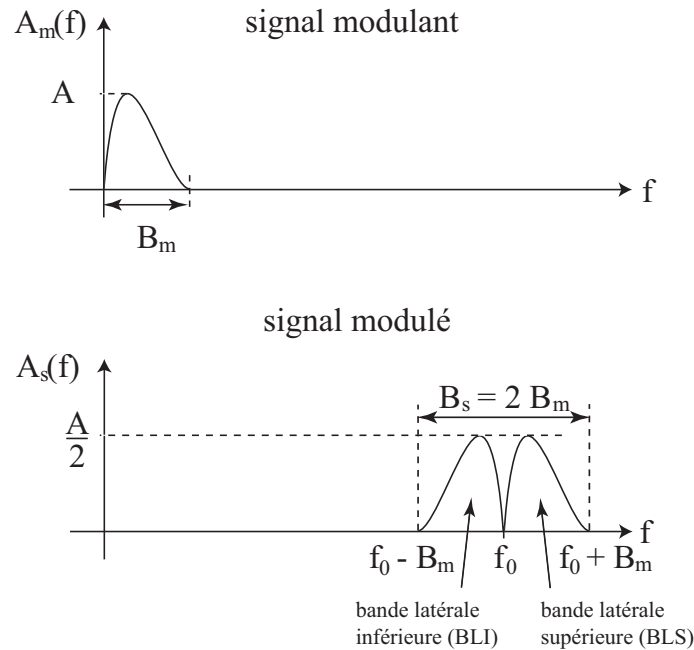
Le signal modulé est un signal à bande étroite, centré autour de la fréquence f_0 de la porteuse. Le but de la modulation est atteint : le signal BF est transformé en un signal HF.

2.2.3 Cas d'un signal modulant quelconque

Représentation temporelle :



Représentation spectrale :



Le spectre d'amplitude du signal AM DBSP avec un signal modulant quelconque est constitué de deux *bandes* symétriques, centrées autour de f_0 : la *bande latérale inférieure* (BLI) et la *bande latérale supérieure* (BLS).

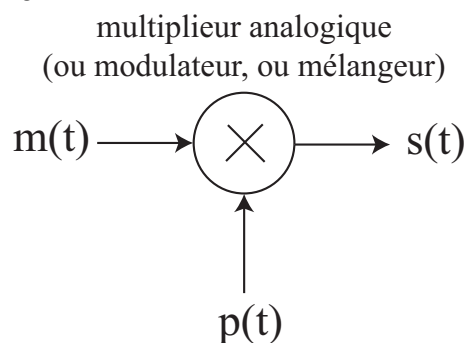
L'occupation spectrale du signal AM DBSP est :

$$B_s = 2 \times B_m$$

La transmission d'un signal en modulation AM DBSP nécessite donc une largeur de bande double de celle du signal modulant.

2.3 Génération du signal AM DBSP

Pour produire un signal AM DBSP, il faut effectuer le produit du signal modulant par la porteuse. Le système qui effectue cette opération est appelé *multiplieur analogique* ou *modulateur* ou encore *mélangeur*.



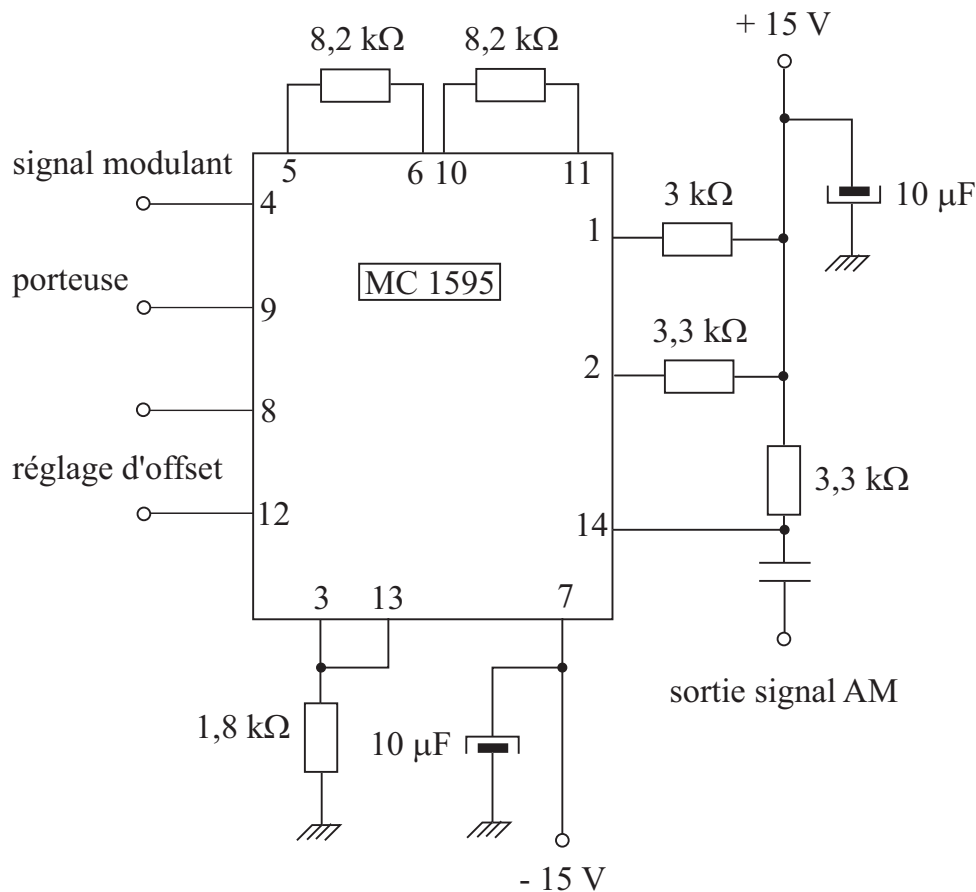
Il existe différentes réalisations possibles du modulateur.

2.3.1 Utilisation de circuits intégrés spécialisés

On utilise des circuits intégrés spécifiques basés sur le principe de l'amplificateur différentiel :

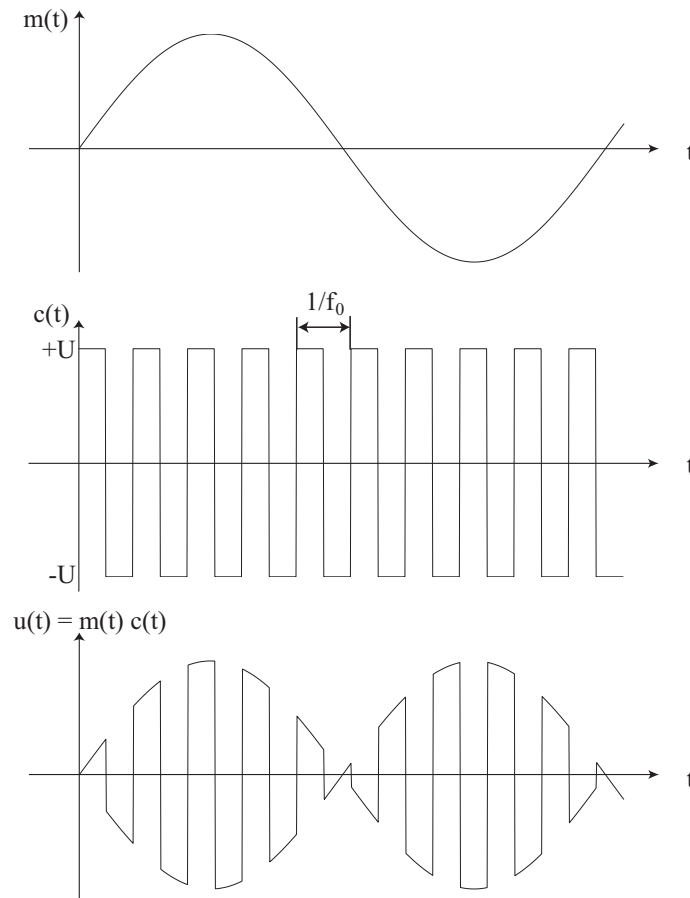
circuit	constructeur	fréquence maximale
AD 633	Analog Device	1 MHz
MC 1496	Motorola	1 MHz
MC 1596	Motorola	1 MHz
MC 1495	Motorola	10 MHz
MC 1595	Motorola	10 MHz
SO42P	Siemens	200 MHz

Exemple de mise en œuvre :



2.3.2 Modulateur en anneau

Le produit $m(t) \cos 2\pi f_0 t$ peut être obtenu en multipliant le signal modulant $m(t)$ par un signal carré bipolaire $c(t)$ de fréquence f_0 et en effectuant un filtrage passe-bande centré sur f_0 .



Spectre du signal $u(t) = c(t) \cdot m(t)$:

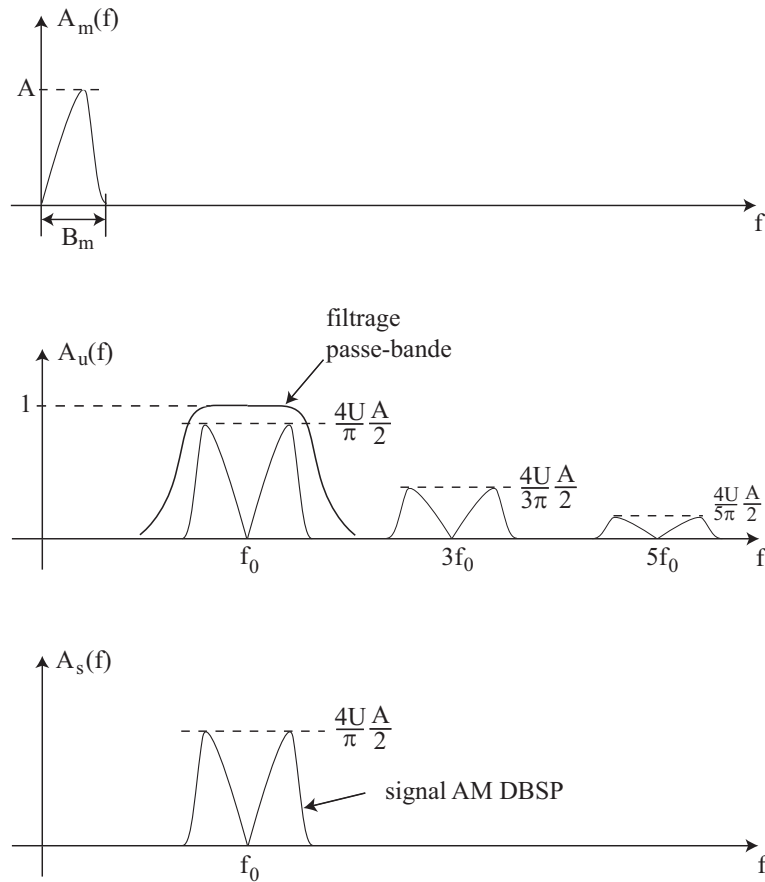
$$c(t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cos 2\pi(2n+1)f_0 t$$

$$u(t) = c(t) \cdot m(t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} m(t) \cos 2\pi(2n+1)f_0 t$$

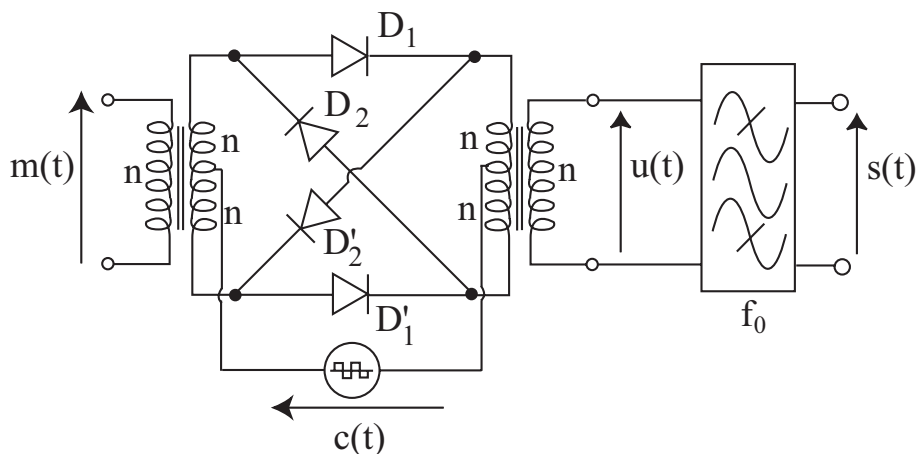
$$= \frac{4U}{\pi} m(t) \cos 2\pi f_0 t + \frac{4U}{\pi} \frac{1}{3} m(t) \cos 2\pi(3f_0)t + \frac{4U}{\pi} \frac{1}{5} m(t) \cos 2\pi(5f_0)t + \dots$$

Après filtrage passe-bande autour de f_0 , on obtient un signal AM DBSP :

$$s(t) = \frac{4U}{\pi} m(t) \cos 2\pi f_0 t$$

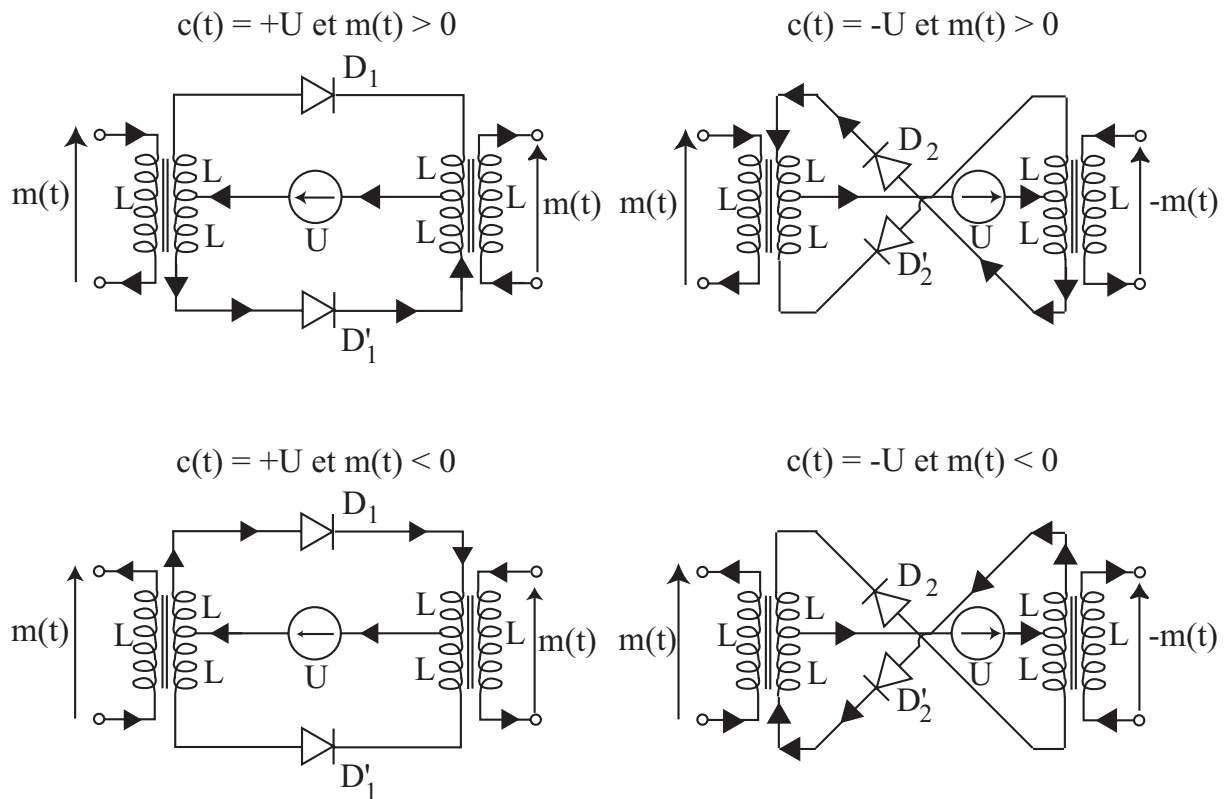


La multiplication du signal modulant $m(t)$ par le signal carré bipolaire $c(t)$ revient à multiplier alternativement $m(t)$ par $+1$ ou par -1 . La réalisation pratique du modulateur en anneau est basée sur le fait que cette multiplication est une commutation de signe, ce qui se traduit par une inversion périodique du sens d'un courant ou d'une tension. Pour réaliser cette opération, on utilise le montage suivant, appelé *modulateur en anneau* :



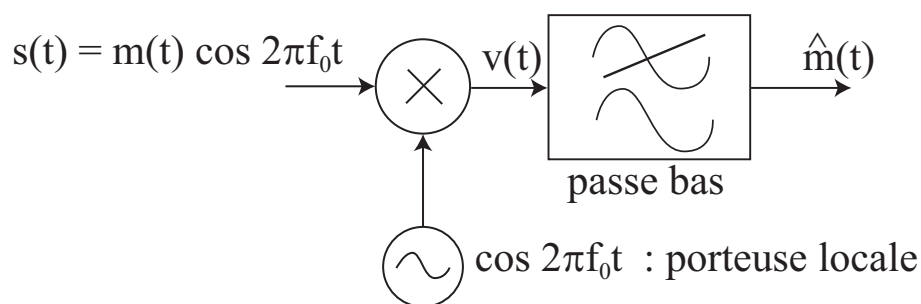
Le signal $c(t)$ commande l'ouverture des diodes disposées en anneau (d'où le nom de *modulateur en anneau*) et assure ainsi la multiplication par ± 1 : si $c(t) = +U$, les diodes D_1 et D'_1 conduisent et les diodes D_2 et D'_2 sont bloquées et $u(t) = m(t)$; si $c(t) = -U$,

les diodes D_2 et D'_2 conduisent et les diodes D_1 et D'_1 sont bloquées et $u(t) = -m(t)$.



2.4 Démodulation des signaux AM DBSP

2.4.1 Principe

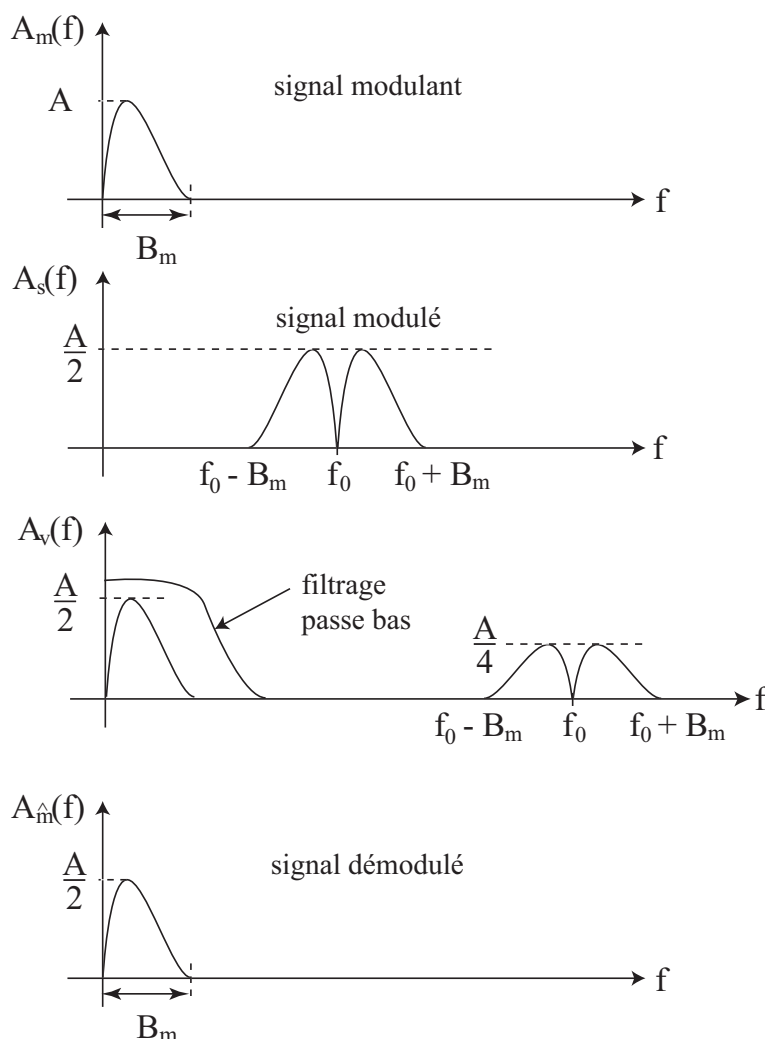


$$\begin{aligned} v(t) &= s(t) \cos 2\pi f_0 t = m(t) \cos^2 2\pi f_0 t \\ &= m(t) \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 4\pi f_0 t) = \frac{1}{2}m(t) + \frac{1}{2}m(t) \cos 4\pi f_0 t \end{aligned}$$

Après filtrage passe bas de $v(t)$, on obtient le signal démodulé :

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{2}m(t)$$

2.4.2 Représentation spectrale



2.4.3 Problème de la démodulation du signal AM DBSP

Si la porteuse locale est affectée d'un déphasage φ , on a :

$$\begin{aligned} v(t) &= s(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = m(t) \cos 2\pi f_0 t \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} m(t) \cos \varphi + \frac{1}{2} m(t) \cos(4\pi f_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

Après filtrage passe bas :

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos \varphi$$

On constate qu'il y a atténuation du signal démodulé, d'où la nécessité que la porteuse locale soit en phase avec la porteuse reçue : *démodulation cohérente* ou *synchrone*. Solution : transmission séparée d'une porteuse de référence appelée *fréquence pilote*.

La modulation AM DBSP n'est pas utilisée pour la radiodiffusion mais pour des techniques de *multiplexage fréquentiel* : transmission de plusieurs signaux sur un même support, chaque signal étant transmis sur une porteuse différente.

2.5 La modulation AM Double Bande Avec Porteuse

2.5.1 Principe

Soit $p(t) = A \cos 2\pi f_0 t$ la porteuse et $m(t)$ le message à transmettre. Le signal AM DBAP s'écrit :

$$s(t) = (A + m(t)) \cos 2\pi f_0 t$$

Dans le cas d'un signal modulant sinusoïdal $m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$, le signal AM DBAP devient :

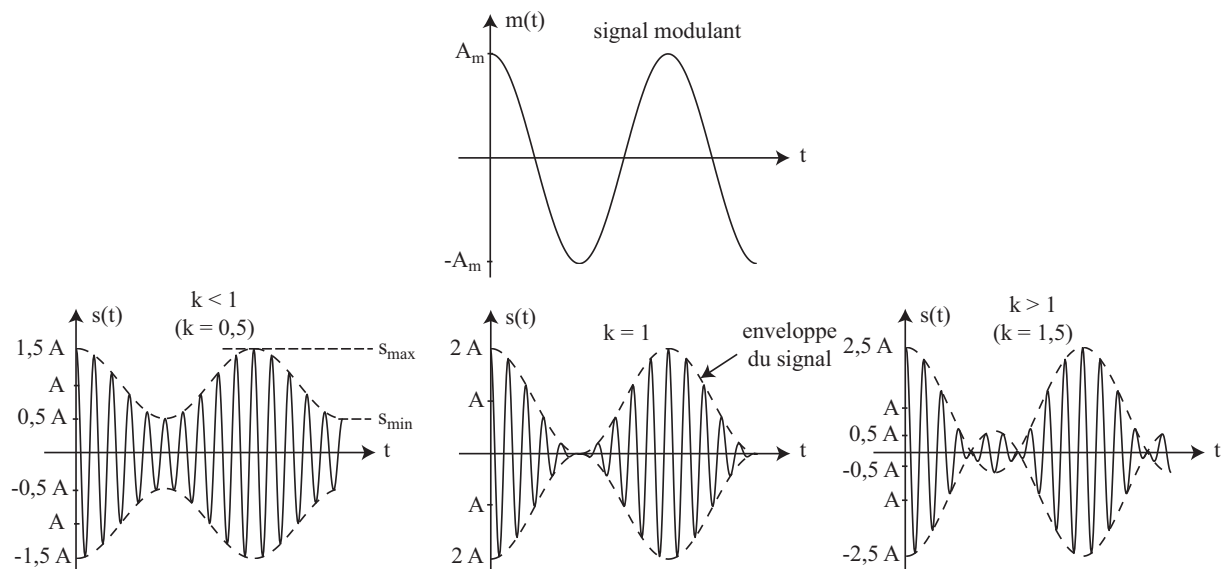
$$\begin{aligned} s(t) &= (A + A_m \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_0 t \\ &= A \left(1 + \frac{A_m}{A} \cos 2\pi f_m t\right) \cos 2\pi f_0 t \\ &= A(1 + k \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

avec $k = \frac{A_m}{A}$: *indice de modulation* (ou *taux de modulation*) = rapport entre l'amplitude du signal modulant et celle de la porteuse.

Pour un signal modulant quelconque, l'indice de modulation est défini par :

$$k = \frac{|m(t)|_{max}}{A}$$

2.5.2 Représentation temporelle du signal AM DBAP

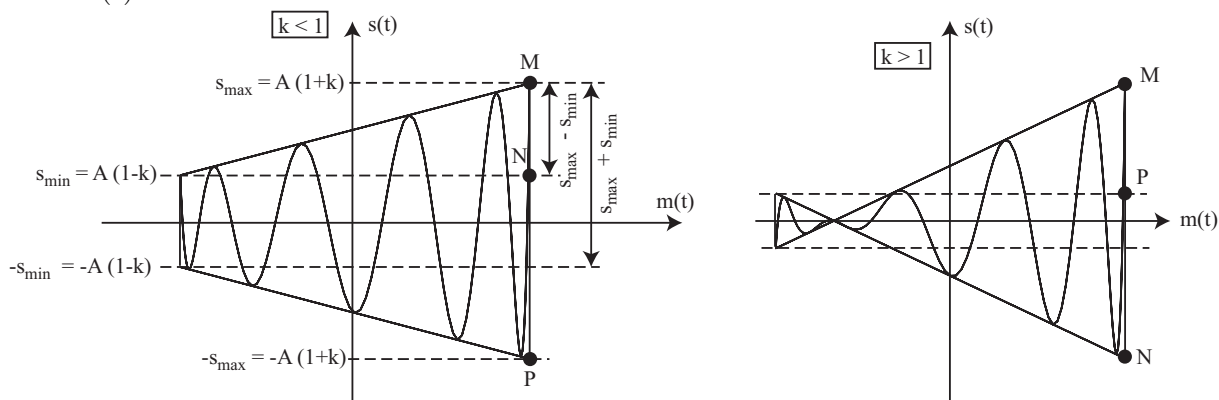


Si $k \leq 1$, l'enveloppe du signal modulé $s(t)$ possède exactement la forme du signal modulant. Si $k > 1$, l'enveloppe du signal modulé ne correspond plus au signal modulant : la signal AM est *surmodulé*. En pratique, on doit toujours avoir $k \leq 1$.

Détermination de l'indice de modulation k à partir de la représentation temporelle du signal AM DBAP :

$$\begin{cases} s_{max} = A(1+k) \\ s_{min} = A(1-k) \end{cases} \Rightarrow k = \frac{s_{max} - s_{min}}{s_{max} + s_{min}}$$

Autre méthode de détermination pratique de l'indice de modulation d'un signal AM DBAP : méthode du trapèze. On trace le signal modulé $s(t)$ en fonction du signal modulant $m(t)$:

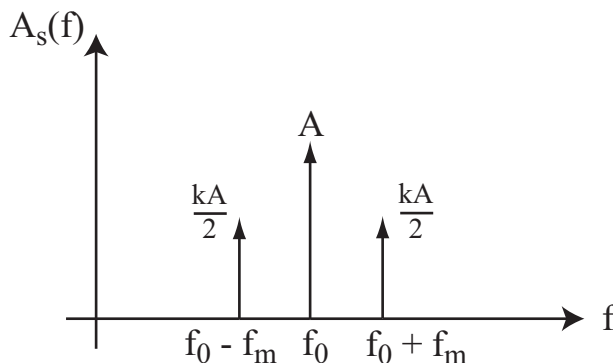


$$k = \frac{s_{max} - s_{min}}{s_{max} + s_{min}} \Rightarrow k = \frac{MN}{MP}$$

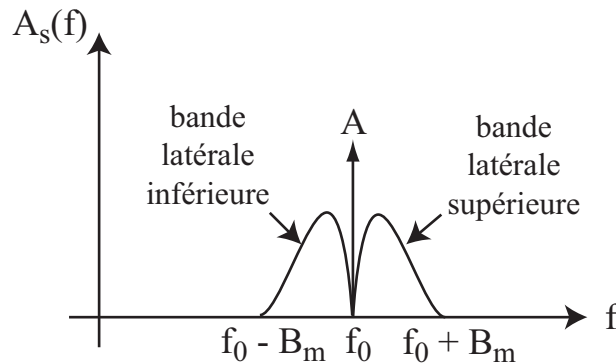
2.5.3 Représentation spectrale du signal AM DBAP

$$\begin{aligned} s(t) &= A(1 + k \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_0 t \\ &= A \cos 2\pi f_0 t + kA \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_0 t \\ &= A \cos 2\pi f_0 t + \frac{kA}{2} \cos 2\pi(f_0 - f_m)t + \frac{kA}{2} \cos 2\pi(f_0 + f_m)t \end{aligned}$$

Le spectre du signal AM DBAP possède donc une raie d'amplitude A à la fréquence f_0 de la porteuse et deux raies latérales d'amplitude $\frac{kA}{2}$ aux fréquences $f_0 - f_m$ et $f_0 + f_m$.



Cas d'un signal modulant quelconque :



Occupation spectrale du signal AM DBAP :

$$B_s = 2B_m$$

2.5.4 Puissance d'un signal AM DBAP

On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} P_s = P_{\text{porteuse}} + P_{\text{BLI}} + P_{\text{BLS}} \\ P_{\text{BLI}} = P_{\text{BLS}} \end{cases}$$

d'où :

$$P_s = P_{\text{porteuse}} + 2 \times P_{\text{BL}}$$

Dans le cas d'un signal modulant sinusoïdal :

$$P_s = \frac{A^2}{2} + 2 \times \frac{\left(\frac{kA}{2}\right)^2}{2} = \frac{A^2}{2} + \frac{k^2 A^2}{4} = \left(1 + \frac{k^2}{2}\right) \frac{A^2}{2}$$

Ainsi :

$$P_s = \left(1 + \frac{k^2}{2}\right) P_{\text{porteuse}}$$

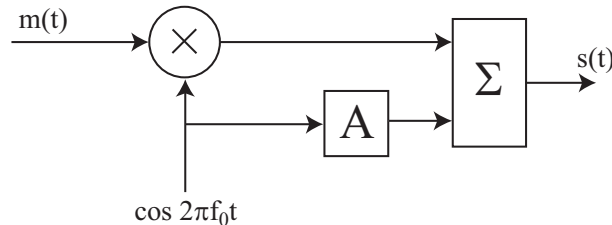
En général, le signal AM transmis ne doit pas être surmodulé : $k \leq 1$. Pour $k = 1$ (valeur maximale), on a donc :

$$P_s = \frac{3}{2} P_{\text{porteuse}} \Rightarrow P_{\text{porteuse}} = \frac{2}{3} P_s$$

Donc seul un tiers (au maximum) de la puissance du signal AM contient l'information utile. C'est un inconvénient de la modulation AM DBAP : *gaspillage de puissance*.

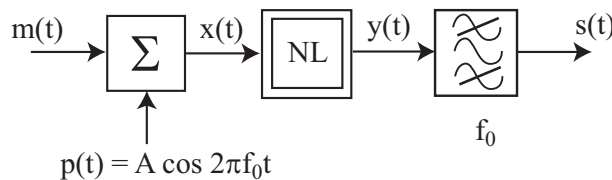
2.6 Génération du signal AM DBAP

2.6.1 Méthode directe



Cette méthode est très peu utilisée.

2.6.2 Utilisation d'une non linéarité



Exemple : on considère la non linéarité définie par :

$$y = F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

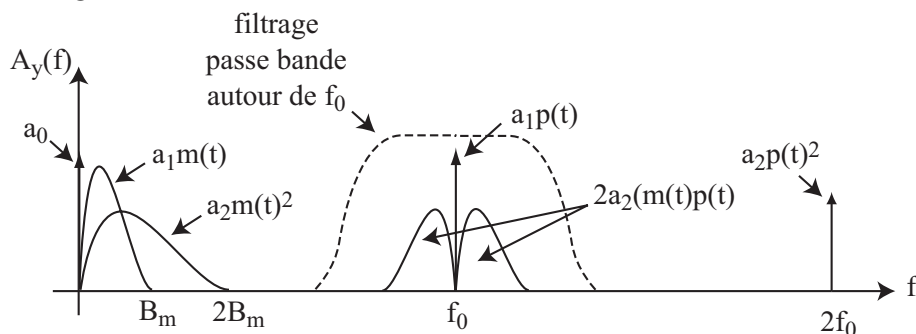
Le signal $y(t)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} y(t) &= F(m(t) + p(t)) \\ &= a_0 + a_1[m(t) + p(t)] + a_2[m(t)^2 + p(t)^2 + 2m(t)p(t)] \\ &= \underbrace{a_0}_0 + \underbrace{a_1m(t)}_{B_m} + \underbrace{a_1p(t)}_{f_0} + \underbrace{a_2m(t)^2}_{2B_m} + \underbrace{a_2p(t)^2}_{2f_0} + \underbrace{2a_2m(t)p(t)}_{f_0} \end{aligned}$$

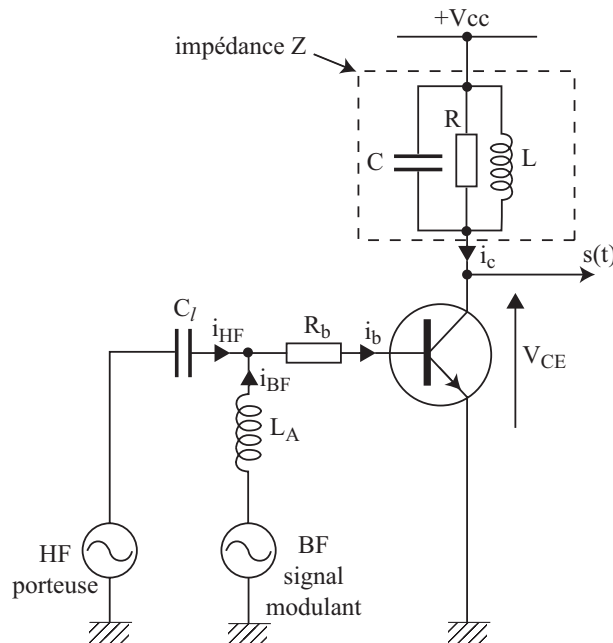
Après filtrage passe bande du signal $y(t)$ autour de la fréquence f_0 , on obtient :

$$\begin{aligned} s(t) &= a_1p(t) + 2a_2m(t)p(t) \\ &= [a_1 + 2a_2m(t)]p(t) \end{aligned}$$

C'est bien un signal AM DBAP :



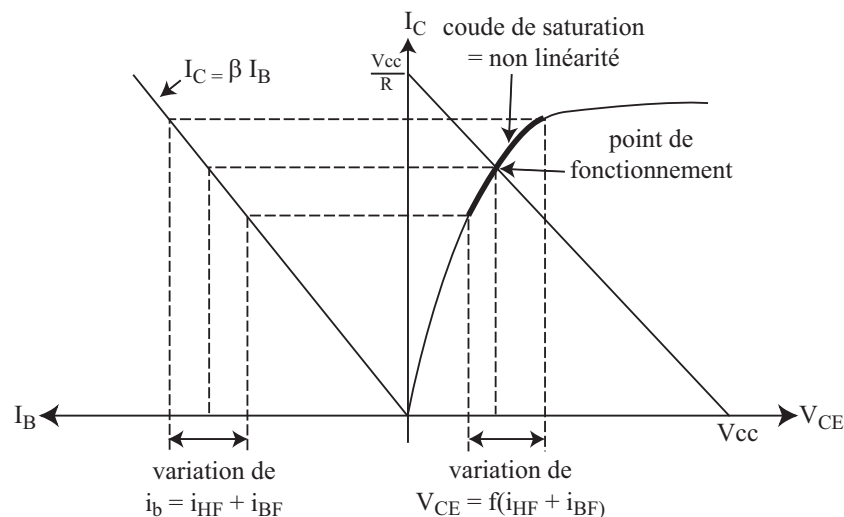
Application pratique :



Dans ce circuit, le *condensateur de liaison* C_l (impédance faible aux hautes fréquences, élevée aux basses fréquences) et l'*inductance d'arrêt* L_A (impédance élevée aux hautes fréquences, faible aux basses fréquences, appelée également *self de choc*) permettent l'aiguillage des courants HF et BF vers la base du transistor sans que les deux sources (porteuse et signal modulant) ne se perturbent mutuellement. On a ainsi :

$$i_b = i_{HF} + i_{BF}$$

Le point de fonctionnement du transistor est choisi dans la zone non linéaire de sa caractéristique $I_C - V_{CE}$:



Ainsi, la tension V_{CE} est bien une fonction non linéaire de $i_b = i_{HF} + i_{BF}$, pouvant être représentée sous la forme :

$$V_{CE} = a_0 + a_1 i_b + a_2 i_b^2 + \dots$$

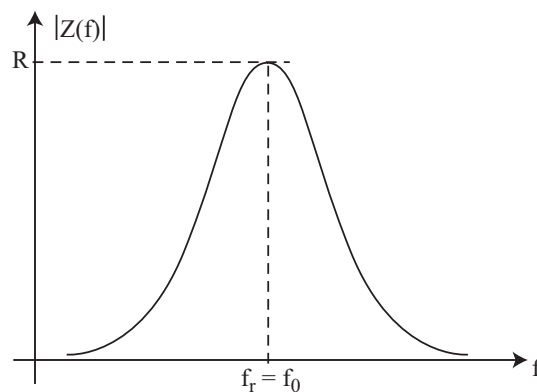
Le filtrage autour de la fréquence f_0 de la porteuse est effectué par le circuit RLC se trouvant dans le circuit de collecteur du transistor. En effet, l'impédance du circuit RLC est :

$$Z(f) = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(2\pi fC - \frac{1}{2\pi fL}\right)}$$

et sa fréquence de résonance est :

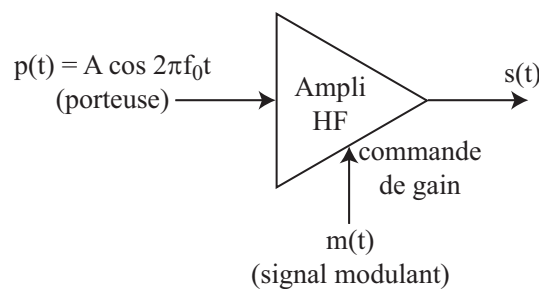
$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Celle-ci est choisie telle que $f_r = f_0$.



En dehors de la résonance ($f \ll f_0$ ou $f \gg f_0$), $Z \approx 0$ et $V_{CE} = V_{cc} = \text{constante}$. A la résonance, $Z = R$ et on a alors le signal AM DBAP sur le collecteur du transistor. On a donc bien un filtrage de la porteuse et des bandes latérales.

2.6.3 Amplificateur à gain variable



A la fréquence f_0 de la porteuse, l'amplificateur HF a un gain $\underline{G}(f_0) = G_0 e^{j\varphi_0}$. Pour une entrée $p(t) = A \cos 2\pi f_0 t$, on a $s(t) = A G_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$. Le gain G_0 dépend des polarisations du montage, on peut donc faire varier G_0 en fonction de $m(t)$ en agissant sur ces polarisations. Ainsi, le gain devient :

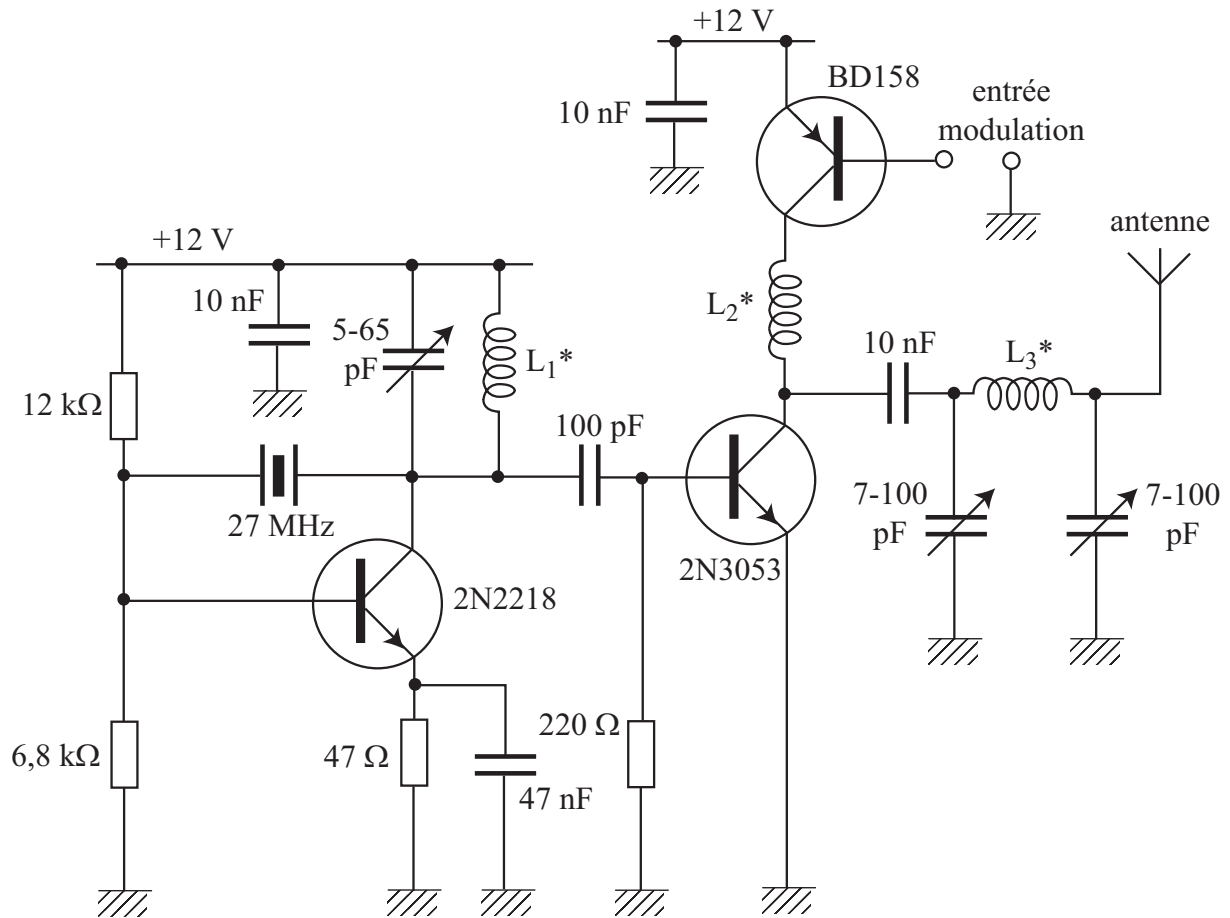
$$G = G_0 + \alpha m(t)$$

Le signal modulant $m(t)$ varie lentement par rapport à la porteuse d'où :

$$s(t) = A[G_0 + \alpha m(t)] \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = A G_0 \left[1 + \frac{\alpha}{G_0} m(t)\right] \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

C'est bien un signal AM DBAP.

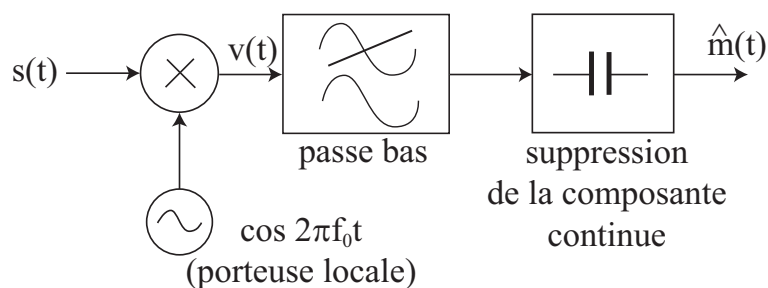
Exemple de réalisation d'un émetteur AM 27 MHz :



- * L₁ : 10 spires, fil diamètre 1 mm, noyau ferrite diamètre 9 mm
- L₂ : 15 spires, fil diamètre 1 mm, noyau ferrite diamètre 9 mm
- L₃ : 12 spires, fil diamètre 0,4 mm, noyau VK200

2.7 Démodulation des signaux AM DBAP

2.7.1 Démodulation cohérente



Pour un signal $m(t)$ tel que $|m(t)|_{max} = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 v(t) &= s(t) \cos 2\pi f_0 t \\
 &= A(1 + k \cdot m(t)) \cos^2 2\pi f_0 t \\
 &= \frac{A}{2}(1 + k \cdot m(t))(1 + \cos 4\pi f_0 t) \\
 &= \frac{A}{2} + \frac{k \cdot A}{2} m(t) + \frac{A}{2} \cos 4\pi f_0 t + \frac{k \cdot A}{2} m(t) \cos 4\pi f_0 t
 \end{aligned}$$

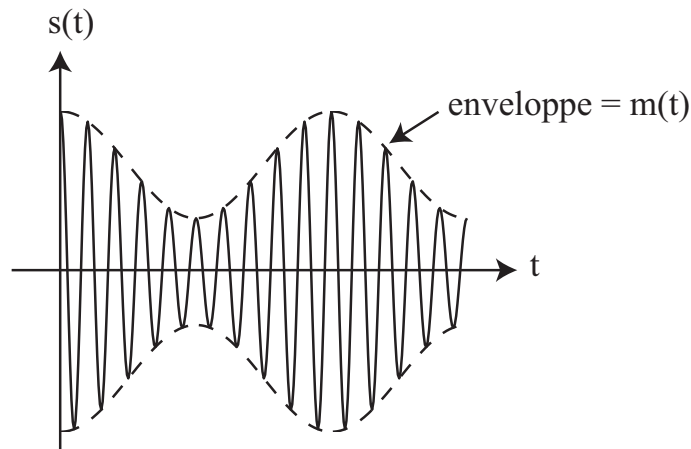
Après filtrage passe-bas et suppression de la composante continue :

$$\hat{m}(t) = \frac{k \cdot A}{2} m(t)$$

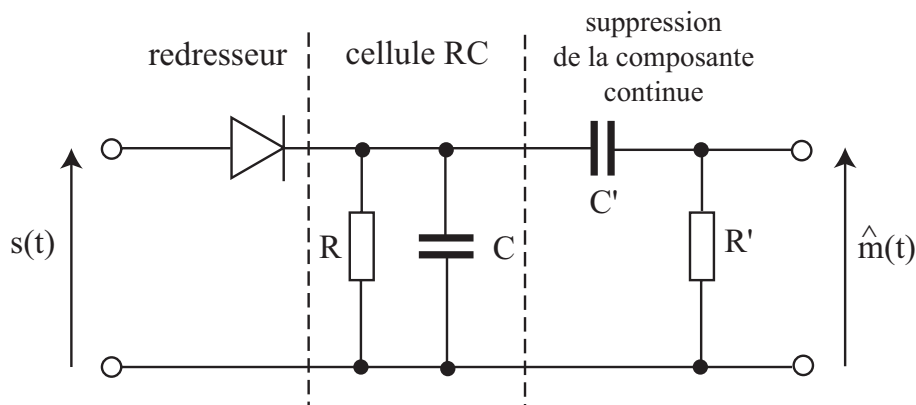
La démodulation cohérente présente le problème de la synchronisation de la porteuse locale avec la porteuse à l'émission. Une méthode de démodulation plus efficace est la *détection d'enveloppe*.

2.7.2 Démodulation AM par détection d'enveloppe

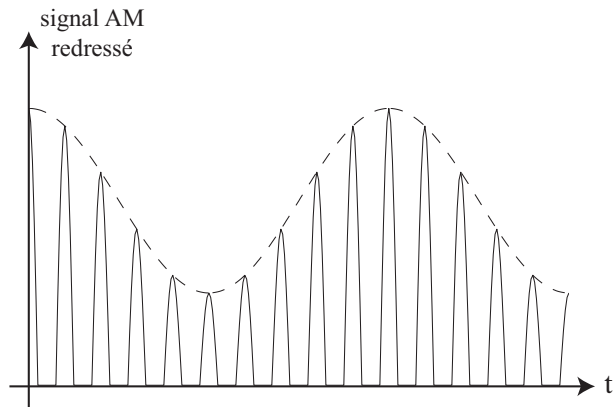
Principe : mesure de l'enveloppe du signal pour récupérer le signal modulant $m(t)$:



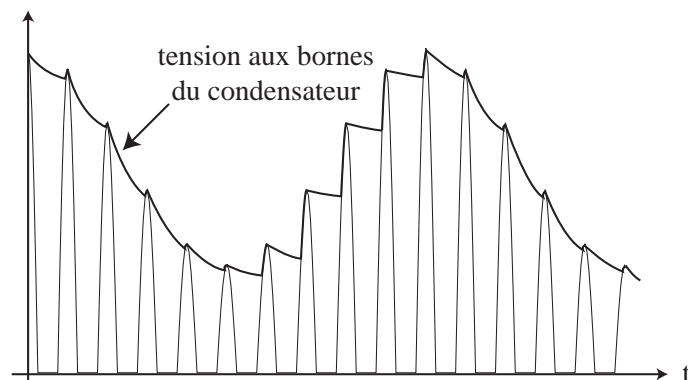
Détecteur d'enveloppe :



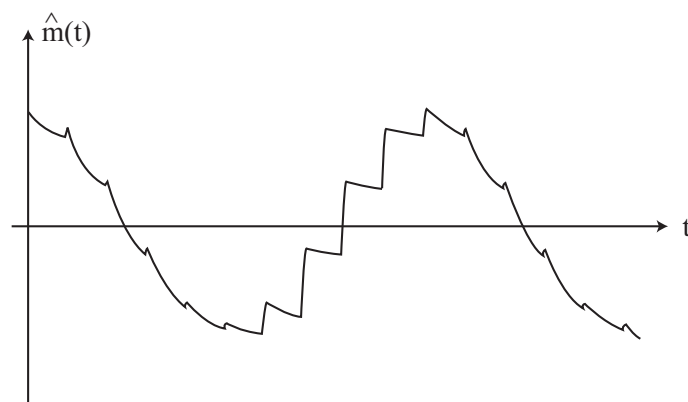
Fonctionnement : le signal AM est redressé par la diode afin de garder seulement l'alternance positive. Le signal AM ne doit pas être surmodulé pour que l'enveloppe du signal redressé soit proportionnelle au signal modulant :



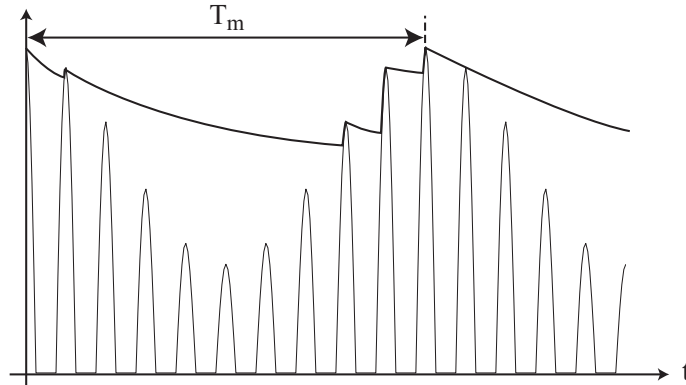
Pendant l'alternance positive du signal AM où la diode conduit, le condensateur C se charge. Lorsque la diode se bloque pendant l'alternance négative, le condensateur se décharge à travers la résistance R avec une constante de temps $\tau = RC$. Si cette constante de temps est suffisamment grande, la tension aux bornes du condensateur reproduit approximativement la forme de l'enveloppe du signal AM.



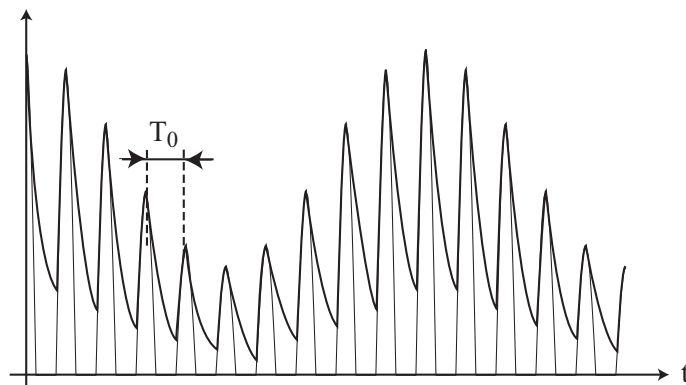
Après élimination de la composante continue, on obtient le signal démodulé :



Si τ est de l'ordre de la période $T_m = \frac{1}{f_m}$ du signal modulant, le condensateur se décharge trop lentement \rightarrow le signal démodulé ne peut pas suivre les variations du signal modulant :



Si τ est de l'ordre de la période $T_0 = \frac{1}{f_0}$ de la porteuse, le condensateur se décharge trop rapidement \rightarrow le signal démodulé présente une forte ondulation haute fréquence :



Pour une démodulation correcte, on doit donc avoir :

$$T_0 \ll \tau \ll T_m$$

c'est-à-dire :

$$f_m \ll \frac{1}{RC} \ll f_0$$

L'avantage de la modulation AM DBAP est la simplicité de la réalisation du démodulateur. La modulation AM DBAP est très utilisée pour la radiodiffusion.

2.8 La modulation AM à Bande Latérale Unique

2.8.1 Principe

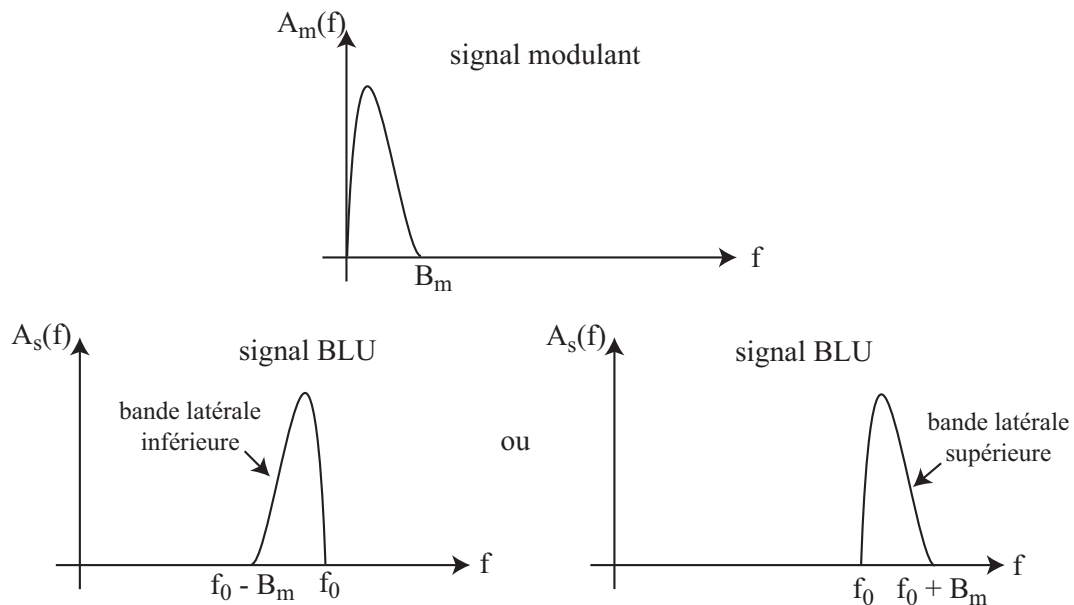
En modulation AM double bande, avec ou sans porteuse, le spectre du signal modulé présente deux bandes latérales symétriques autour de la fréquence de la porteuse. Ces deux bandes latérales se déduisent l'une de l'autre, donc elles contiennent chacune la même information. Leur occupation spectrale vaut le double de celle du signal en bande

de base. Il y a donc un gaspillage de la puissance de l'émetteur et de la bande passante du canal de transmission.

Principe de la modulation AM à bande latérale unique (BLU) : supprimer l'une des deux bandes latérales du signal transmis pour une meilleure exploitation de la puissance et de la bande passante.

La modulation BLU (ou SSB : *Single Side Band*) est principalement utilisée en radiotéléphonie militaire et marine.

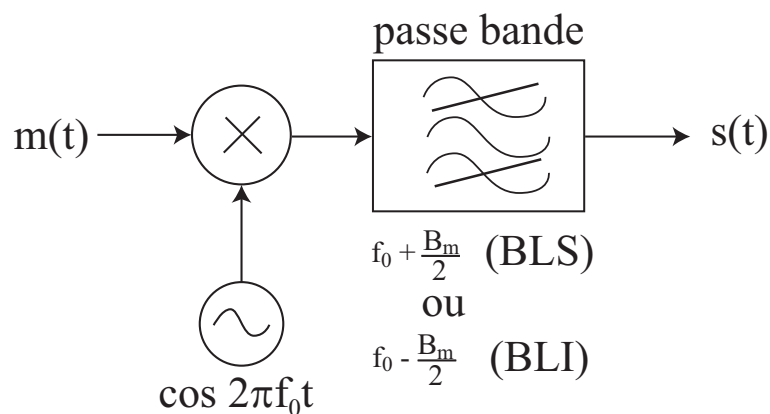
2.8.2 Caractéristiques du signal BLU

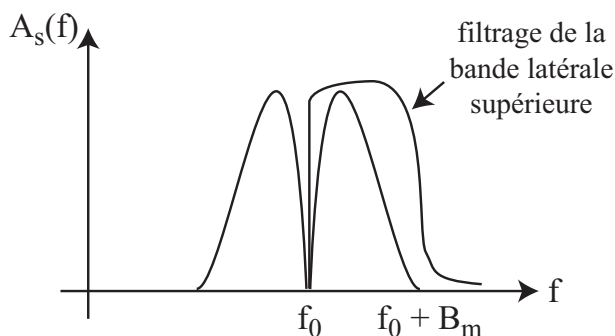


Occupation spectrale du signal BLU :

$$B_s = B_m$$

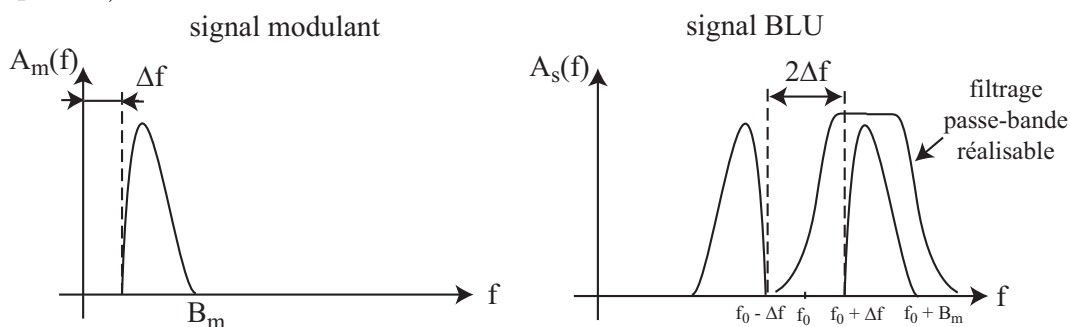
2.8.3 Génération du signal BLU par filtrage passe-bande



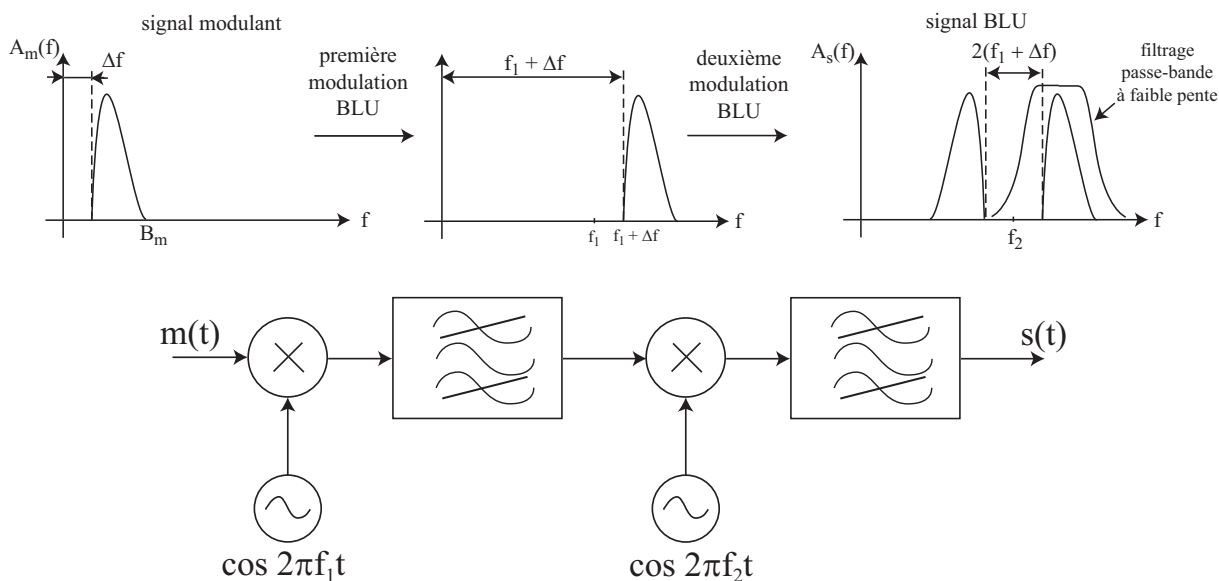


Problème posé par cette méthode : réalisation d'un filtre passe-bande avec une coupure nette en f_0 (pente infinie) \rightarrow le spectre du signal modulant ne doit pas contenir de fréquences très basses pour pouvoir utiliser un filtre passe-bande réalisable.

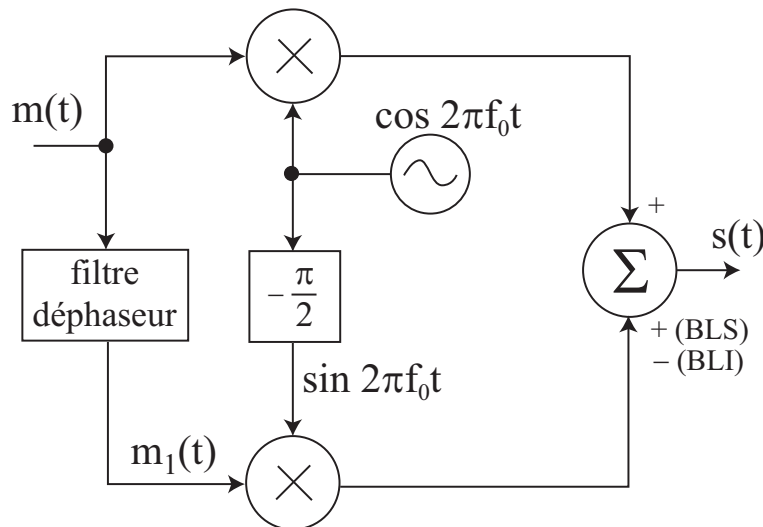
En pratique, on supprime les fréquences du signal modulant comprises dans un intervalle $[0 \Delta f]$ à l'aide d'un filtre passe bande avant d'effectuer la modulation ($\Delta f = 300$ Hz pour la téléphonie) :



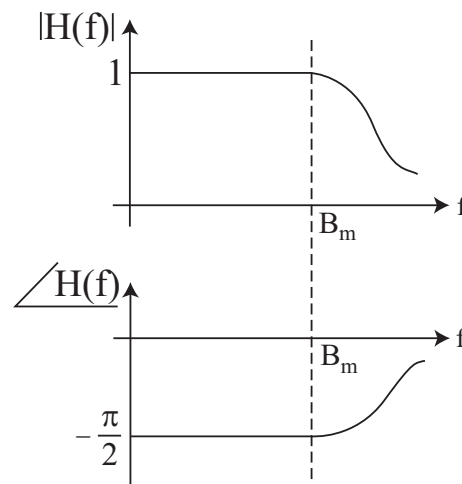
Pour augmenter encore Δf afin de pouvoir utiliser un filtre passe-bande avec une faible pente, on peut réaliser une double modulation BLU :



2.8.4 Génération du signal BLU par la méthode du déphasage



Le filtre déphaseur (ou filtre de Hilbert) présente un gain égal à 1 et introduit un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ dans la bande de fréquences $[0 B_m]$ (B_m : occupation spectrale du signal modulant) :



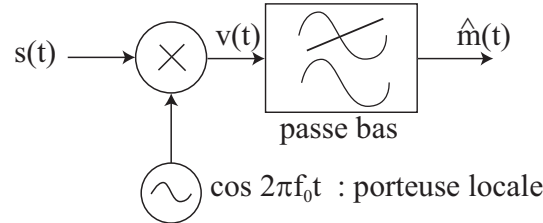
Pour un signal modulant $m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$, on a :

$$\begin{aligned}
 s(t) &= m(t) \cos 2\pi f_0 t \pm m_1(t) \sin 2\pi f_0 t \\
 &= A_m \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_0 t \pm A_m \sin 2\pi f_m t \sin 2\pi f_0 t \\
 &= \frac{A_m}{2} \cos 2\pi(f_0 + f_m)t + \frac{A_m}{2} \cos 2\pi(f_0 - f_m)t \\
 &\quad \pm \frac{A_m}{2} [\cos 2\pi(f_0 + f_m)t - \cos 2\pi(f_0 - f_m)t] \\
 &= \begin{cases} A_m \cos 2\pi(f_0 + f_m)t & (+ : \text{BLS}) \\ A_m \cos 2\pi(f_0 - f_m)t & (- : \text{BLI}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

La réalisation pratique du filtre déphaseur reste cependant délicate.

2.8.5 Démodulation du signal BLU

La démodulation d'un signal BLU se fait par démodulation cohérente :



Pour un signal BLU $s(t) = A_m \cos 2\pi(f_0 + f_m)t$, on a :

$$\begin{aligned} v(t) &= s(t) \cos 2\pi f_0 t \\ &= A_m \cos 2\pi(f_0 + f_m)t \cos 2\pi f_0 t \\ &= \frac{A_m}{2} \cos 2\pi f_m t + \frac{A_m}{2} \cos 2\pi(2f_0 + f_m)t \end{aligned}$$

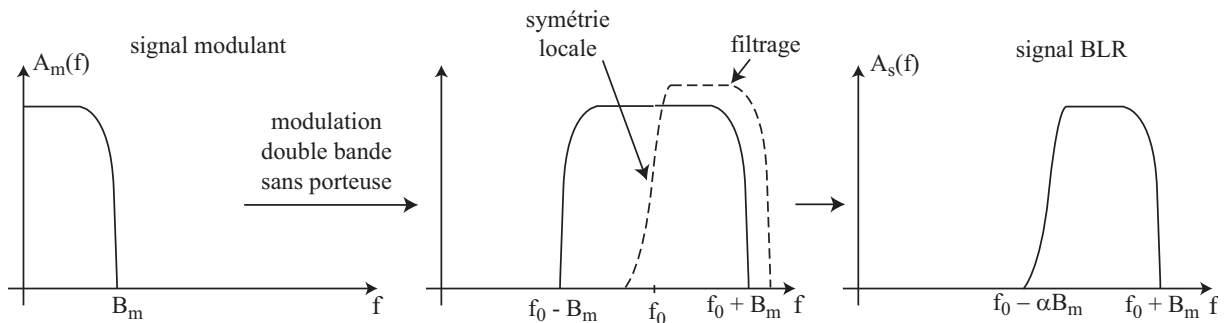
Après filtrage passe-bas, on obtient le signal démodulé :

$$\hat{m}(t) = \frac{A_m}{2} \cos 2\pi f_m t = \frac{1}{2}m(t)$$

2.9 La modulation AM à Bande Latérale Résiduelle

La modulation AM à Bande Latérale Résiduelle (BLR ou VSB : *Vestigial Side Band*) est utilisée lorsque les signaux à transmettre présentent des composantes spectrales importantes aux très basses fréquences qui ne peuvent donc pas être éliminées comme dans le cas de la modulation BLU. Exemple caractéristique : les signaux vidéo. La modulation BLR est une technique intermédiaire entre les modulations double bande et BLU.

Principe :



L'occupation spectrale du signal BLR est :

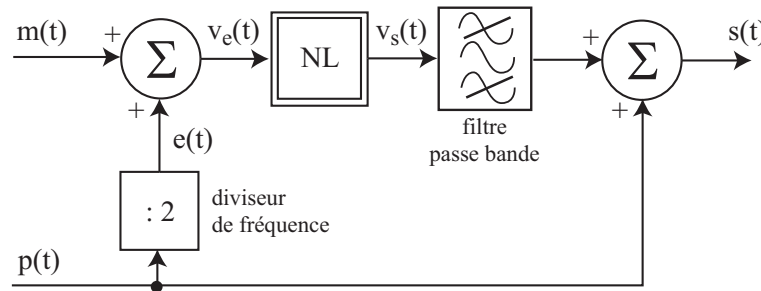
$$B_s = (1 + \alpha)B_m \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \text{ (} \alpha = 0,15 \text{ en général)}$$

On montre que la démodulation d'un signal BLR peut se faire par détection d'enveloppe.

2.10 Exercices

2.10.1 Modulateur AM à non linéarité cubique

Le schéma bloc suivant représente un modulateur d'amplitude où $p(t) = A \cos 2\pi f_0 t$ représente la porteuse et $m(t) = b \cdot x(t)$ le signal modulant avec $|x(t)| \leq 1$. Le circuit non linéaire est caractérisé par l'équation $v_s = a \cdot v_e^3$ où v_s désigne sa sortie et v_e son entrée.



1. Donner l'expression des signaux $v_e(t)$ et $v_s(t)$.
2. Quelle est la condition sur le filtre passe bande pour obtenir un signal AM DBAP en sortie ? Donner alors l'expression de $s(t)$.
3. Déterminer l'indice de modulation k du signal AM si $A = 1$, $a = 2$ et $b = 0,2$. Donner la représentation temporelle puis spectrale de $s(t)$.

Correction :

1. On a :

$$\begin{aligned} v_e(t) &= m(t) + e(t) \\ &= bx(t) + A \cos \frac{\omega_0 t}{2} \text{ avec } \omega_0 = 2\pi f_0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} v_s(t) &= av_e(t)^3 = a \left(bx(t) + A \cos \frac{\omega_0 t}{2} \right)^3 \\ &= ab^3 x(t)^3 + 3abx(t)A^2 \cos^2 \frac{\omega_0 t}{2} + 3ab^2 x(t)^2 A \cos \frac{\omega_0 t}{2} + aA^3 \cos^3 \frac{\omega_0 t}{2} \\ &= ab^3 x(t)^3 + 3abx(t)A^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \omega_0 t \right) + 3ab^2 x(t)^2 A \cos \frac{\omega_0 t}{2} \\ &\quad + aA^3 \left(\frac{3}{4} \cos \frac{\omega_0 t}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\omega_0 t}{2} \right) \end{aligned}$$

2. Le signal $v_s(t)$ possède des composantes spectrales aux fréquences f_0 , $\frac{f_0}{2}$ et $\frac{3f_0}{2}$. La composante à la fréquence f_0 correspond au produit de $x(t)$ par la porteuse. Il faut donc garder seulement ce terme pour obtenir la modulation souhaitée : le filtre passe bande doit ainsi posséder une fréquence centrale $f_c = f_0$. A la sortie du filtre passe bande, il ne reste plus que le terme $\frac{3}{2}abA^2 x(t) \cos \omega_0 t$. Le signal $s(t)$ s'écrit alors :

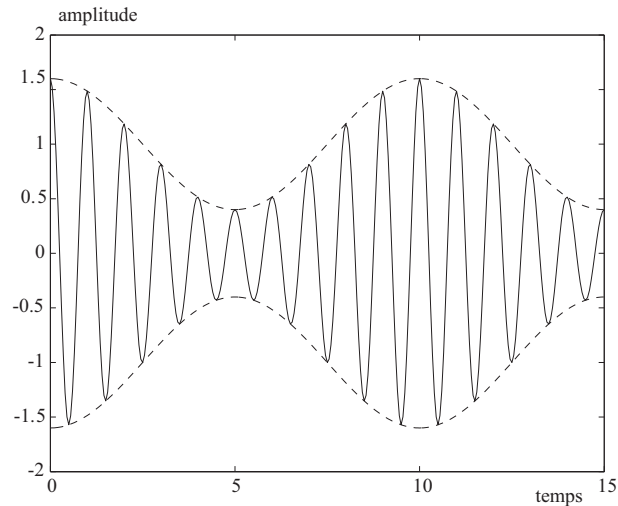
$$s(t) = A \cos 2\pi f_0 t + \frac{3}{2}abA^2 x(t) \cos 2\pi f_0 t = A \left(1 + \frac{3abA}{2} x(t) \right) \cos 2\pi f_0 t$$

C'est bien un signal AM DBAP dont l'indice de modulation est $k = \frac{3abA}{2}$ puisqu'on a $|x(t)| \leq 1$.

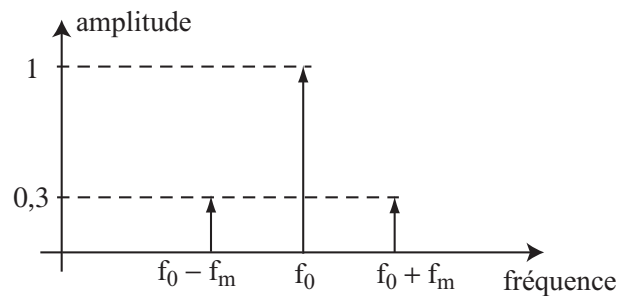
3. Pour $A = 1$, $a = 2$ et $b = 0,2$, on a :

$$k = \frac{3abA}{2} = \frac{3 \times 2 \times 0,2 \times 1}{2} = 0,6$$

Représentation temporelle (cas d'un signal modulant sinusoïdal) :

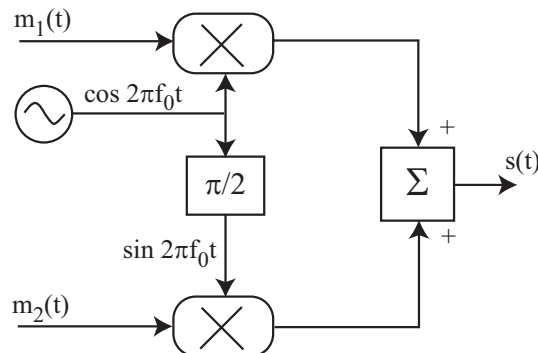


Représentation spectrale :



2.10.2 Modulation d'amplitude en quadrature (QAM)

On veut transmettre deux messages $m_1(t)$ et $m_2(t)$ dont l'occupation spectrale est respectivement B_{m_1} et B_{m_2} sur une même porteuse de fréquence f_0 . Pour cela, on utilise le système de modulation suivant :



1. Ecrire l'expression temporelle du signal $s(t)$ à transmettre (signal QAM).
2. Représenter le spectre de $s(t)$ en fonction de celui de $m_1(t)$ et $m_2(t)$ dans le cas où $m_1(t)$ et $m_2(t)$ sont des signaux sinusoïdaux de fréquences respectives f_{m_1} et f_{m_2} .
3. Donner l'occupation spectrale de $s(t)$ et conclure.
4. Proposer un démodulateur qui permet d'extraire les signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$ du signal $s(t)$.

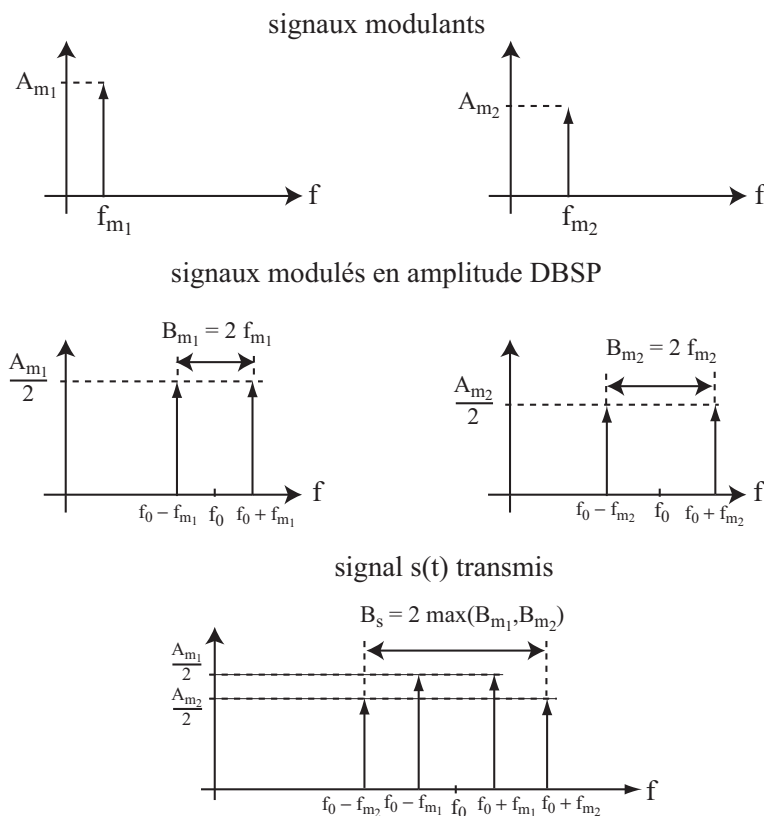
Correction :

1. D'après le schéma synoptique du modulateur, on a :

$$s(t) = m_1(t) \cos 2\pi f_0 t + m_2(t) \sin 2\pi f_0 t$$

Le signal $s(t)$ est la somme des signaux AM DBSP $m_1(t) \cos 2\pi f_0 t$ et $m_2(t) \sin 2\pi f_0 t$.

2. Le spectre du signal QAM $s(t)$ est la somme des spectres des deux signaux AM DBSP :

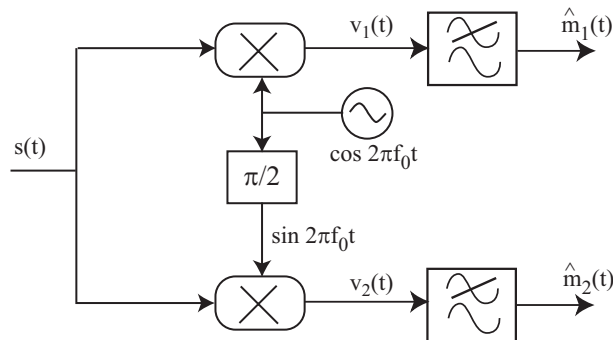


3. D'après le spectre de $s(t)$, on a :

$$B_s = 2 \times \max(B_{m_1}, B_{m_2})$$

Le signal QAM contient deux signaux modulateurs et donc deux informations différentes. L'occupation spectrale de ce signal est égale à celle d'un signal AM DBSP qui ne contient qu'un seul signal. Donc la modulation QAM permet de transmettre deux fois plus d'information que la modulation AM DBSP en utilisant la même bande passante.

4. On peut utiliser le démodulateur suivant :



En effet, on a :

$$\begin{aligned} v_1(t) &= s(t) \cos 2\pi f_0 t = m_1(t) \cos^2 2\pi f_0 t + m_2(t) \sin 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0 t \\ &= \frac{1}{2} m_1(t) (1 + \cos 4\pi f_0 t) + \frac{1}{2} m_2(t) \sin 4\pi f_0 t \\ &= \frac{1}{2} m_1(t) + \underbrace{\frac{1}{2} m_1(t) \cos 4\pi f_0 t}_{2f_0} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2(t) \sin 4\pi f_0 t}_{2f_0} \end{aligned}$$

Le filtre passe bas permet d'éliminer les composantes à la fréquence $2f_0$ et on a donc :

$$\hat{m}_1(t) = \frac{1}{2} m_1(t)$$

De même :

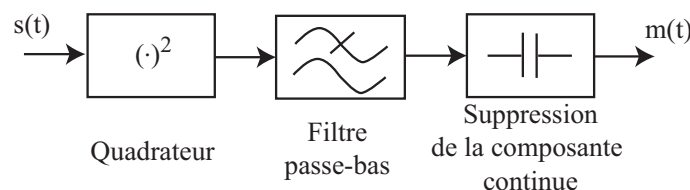
$$\begin{aligned} v_2(t) &= s(t) \sin 2\pi f_0 t = m_1(t) \cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 t + m_2(t) \sin^2 2\pi f_0 t \\ &= \frac{1}{2} m_1(t) \sin 4\pi f_0 t + \frac{1}{2} m_2(t) (1 - \cos 4\pi f_0 t) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} m_1(t) \sin 4\pi f_0 t}_{2f_0} + \frac{1}{2} m_2(t) - \underbrace{\frac{1}{2} m_2(t) \cos 4\pi f_0 t}_{2f_0} \end{aligned}$$

Le filtre passe bas permet d'éliminer les composantes à la fréquence $2f_0$ et on a donc :

$$\hat{m}_2(t) = \frac{1}{2} m_2(t)$$

2.10.3 Démodulation quadratique

On considère un signal $s(t)$ modulé en amplitude DBAP. Déterminer à quelle condition le dispositif suivant permet de démoduler $s(t)$:



Correction :

Pour un signal modulant $m(t)$ tel que $|m(t)| \leq 1$, on a :

$$s(t) = A((1 + k m(t)) \cos 2\pi f_0 t)$$

et donc :

$$\begin{aligned} s(t)^2 &= A^2 ((1 + k m(t))^2 \cos^2 2\pi f_0 t) \\ &= \frac{A^2}{2} (1 + 2k m(t) + k^2 m(t)^2) (1 + \cos 4\pi f_0 t) \\ &= \frac{A^2}{2} (1 + \cos 4\pi f_0 t + 2k m(t) + 2k m(t) \cos 4\pi f_0 t + k^2 m(t)^2 + k^2 m(t)^2 \cos 4\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Après filtrage passe bas et élimination de la composante continue, on obtient :

$$\hat{m}(t) = kA^2 m(t) + \frac{k^2 A^2}{2} m(t)^2$$

Pour que le signal démodulé $\hat{m}(t)$ soit proportionnel au signal modulant $m(t)$, il faut que le terme $\frac{k^2 A^2}{2} m(t)^2$ soit faible devant le terme $kA^2 m(t)$:

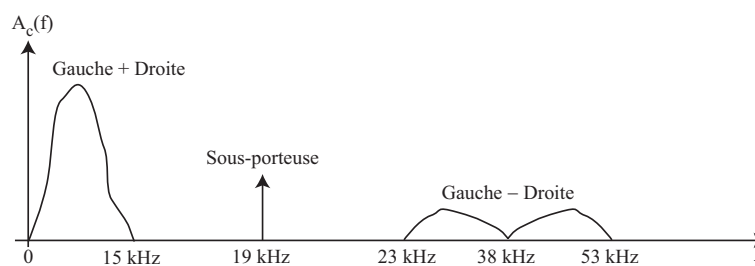
$$\begin{aligned} \left| \frac{k^2 A^2}{2} m(t)^2 \right| &\ll |kA^2 m(t)| \\ \Rightarrow |km(t)| &\ll 2 \end{aligned}$$

Comme on a $|m(t)| \leq 1$, la condition s'écrit :

$$|k| \ll 2$$

2.10.4 Codage et décodage stéréophonique

Le signal composite stéréophonique $c(t)$ possède le spectre suivant :



Il contient les voies droite $d(t)$ et gauche $g(t)$ par multiplexage fréquentiel. La somme $g(t) + d(t)$ est transmise en bande de base, la différence $g(t) - d(t)$ est transmise en modulation DBSP à la fréquence $f_0 = 38$ kHz. On ajoute en plus une sous-porteuse (fréquence pilote) à 19 kHz pour faciliter la synchronisation du démodulateur à la réception.

1. Justifier le choix du signal composite utilisé.
2. Donner l'expression du signal composite $c(t)$.

3. Proposer un schéma de décodeur stéréophonique permettant d'obtenir séparément les signaux $g(t)$ et $d(t)$. On utilisera une démodulation cohérente et des filtres.

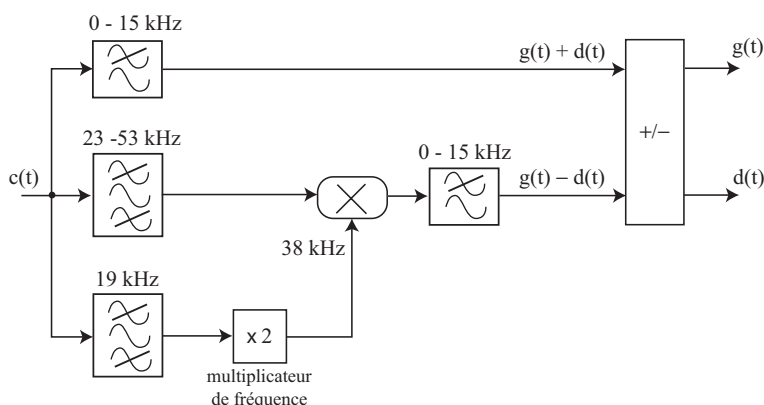
Correction :

1. Le signal composite utilisé permet de transmettre un signal stéréophonique, c'est-à-dire contenant un signal « gauche » $g(t)$ et un signal « droite » $d(t)$, sans affecter la réception monophonique. En effet, un récepteur monophonique doit être capable de recevoir correctement une émission stéréophonique. Pour cela, on ne transmet pas directement les signaux $g(t)$ et $d(t)$ mais plutôt le signal $g(t) + d(t)$ qui constitue le signal monophonique et le signal $g(t) - d(t)$ modulé sur une sous-porteuse de 38 kHz située au-delà du spectre des fréquences audibles. Un récepteur monophonique reçoit donc seulement le signal $g(t) + d(t)$ tandis qu'un récepteur stéréophonique reçoit en plus le signal $g(t) - d(t)$. Le récepteur stéréophonique peut ainsi reconstituer les signaux $g(t)$ et $d(t)$ à partir du signal composite reçu.
2. D'après le spectre du signal composite, on a :

$$c(t) = g(t) + d(t) + (g(t) - d(t)) \cos 2\pi f_0 t + \cos 2\pi \frac{f_0}{2} t$$

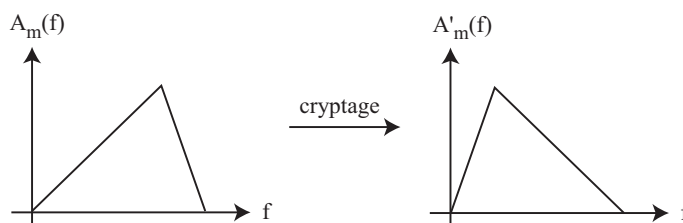
avec $f_0 = 38$ kHz.

3. Schéma d'un décodeur stéréophonique :



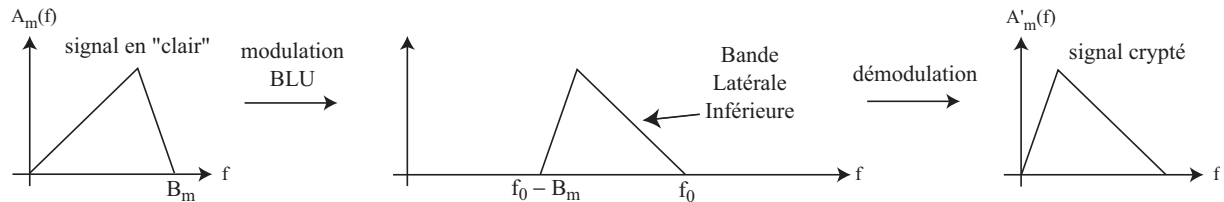
2.10.5 Cryptage par inversion de spectre

On veut crypter un message $m(t)$, une émission de télévision par exemple, dont l'occupation spectrale est B_m . Proposer le schéma de principe d'un système qui effectue une inversion de spectre :



Correction :

Pour réaliser le cryptage par inversion de spectre, on peut effectuer une modulation à bande latérale unique en conservant la bande latérale inférieure qui est symétrique par rapport à la bande latérale supérieure puis démoduler ce signal :

**2.10.6 Puissance d'un signal AM**

Sachant qu'un signal AM double bande avec porteuse est émis avec une puissance de 1000 W, compléter le tableau suivant :

Indice de modulation	P_{porteuse} (W)	P_{BLI} (W)	P_{BLS} (W)
1			
	734,6		
	956,9	21,9	
			87,2

Correction :

Première ligne du tableau :

$$P_s = \left(1 + \frac{k^2}{2}\right) P_{\text{porteuse}} \Rightarrow P_{\text{porteuse}} = \frac{P_s}{\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)} = \frac{1000}{1,5} = 666,7 \text{ W}$$

$$P_s = P_{\text{porteuse}} + 2P_{BL} \Rightarrow P_{BLI} = P_{BLS} = \frac{P_s - P_{\text{porteuse}}}{2} = \frac{1000 - 666,7}{2} = 166,7 \text{ W}$$

Deuxième ligne :

$$P_s = \left(1 + \frac{k^2}{2}\right) P_{\text{porteuse}} \Rightarrow k = \sqrt{2 \left(\frac{P_s}{P_{\text{porteuse}}} - 1 \right)} = \sqrt{2 \times \left(\frac{1000}{734,6} - 1 \right)} = 0,85$$

$$P_s = P_{\text{porteuse}} + 2P_{BL} \Rightarrow P_{BLI} = P_{BLS} = \frac{P_s - P_{\text{porteuse}}}{2} = \frac{1000 - 734,6}{2} = 132,7 \text{ W}$$

Troisième ligne :

$$\left. \begin{array}{l} P_s = \left(1 + \frac{k^2}{2}\right) P_{\text{porteuse}} \\ P_s = P_{\text{porteuse}} + 2P_{BL} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(1 + \frac{k^2}{2}\right) P_{\text{porteuse}} = P_{\text{porteuse}} + 2P_{BL} \Rightarrow \frac{k^2}{2} P_{\text{porteuse}} = 2P_{BL}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{BL}}{P_{\text{porteuse}}} = \frac{k^2}{4} \Rightarrow k = 2\sqrt{\frac{P_{BL}}{P_{\text{porteuse}}}} = 2 \times \sqrt{\frac{21,9}{956,9}} = 0,3$$

$$P_{BLS} = P_{BLI} = 21,9 \text{ W}$$

Quatrième ligne :

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{porteuse}} &= \frac{P_s}{\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)} \\ P_{\text{porteuse}} &= P_s - 2P_{BL} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{P_s}{\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)} = P_s - 2P_{BL} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{4\frac{P_{BL}}{P_s}}{1 - 2\frac{P_{BL}}{P_s}}} = \sqrt{\frac{4 \times \frac{87,2}{1000}}{1 - 2 \times \frac{87,2}{1000}}} \\ = 0,65$$

$$P_{\text{porteuse}} = \frac{P_s}{\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)} = \frac{1000}{\left(1 + \frac{0,65^2}{2}\right)} = 825,6 \text{ W}$$

$$P_{BLS} = P_{BLI} = 87,2 \text{ W}$$

On a ainsi :

Indice de modulation	P_{porteuse} (W)	P_{BLI} (W)	P_{BLS} (W)
1	666,7	166,7	166,7
0,85	734,6	132,7	132,7
0,3	956,9	21,9	21,9
0,65	825,6	87,2	87,2

Chapitre 3

La modulation de fréquence

3.1 Définitions

Soit un signal $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$. On définit :

- la *phase instantanée* :

$$\Theta_i(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t)$$

- la *fréquence instantanée* :

$$F_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Theta_i(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

La modulation de fréquence (FM : *Frequency Modulation*) est la transformation du message $m(t)$ à transmettre en variations de la fréquence instantanée du signal $s(t)$ qui est transmis sur le canal de transmission. La transformation est linéaire :

$$F_i(t) = f_0 + k_f \cdot m(t)$$

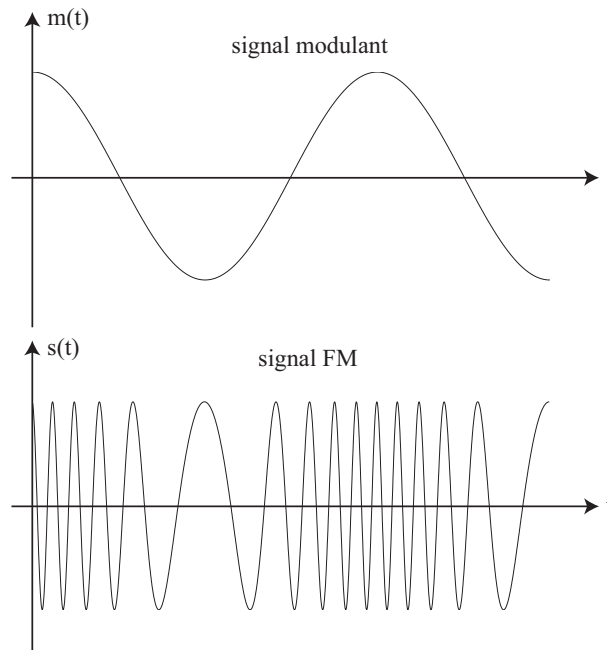
On en déduit l'expression du signal modulé en fréquence :

$$\Theta_i(t) = 2\pi \int_0^t F_i(u) du = 2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du$$

d'où :

$$s(t) = A \cos \left(2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du \right)$$

Représentation temporelle :

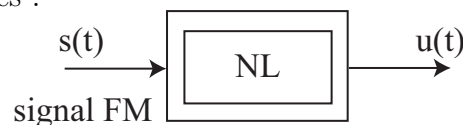


3.2 Caractéristiques de la modulation de fréquence

La FM possède une très bonne résistance au bruit (perturbations) : elle est utilisée pour la radiodiffusion haute fidélité et les transmissions par satellites.

C'est une modulation à enveloppe constante, d'où :

- puissance constante : $P_{FM} = \frac{A^2}{2}$, indépendante du signal modulant $m(t)$, ce qui facilite le dimensionnement et la réalisation des émetteurs ;
- résistance aux non linéarités :



$$u = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots$$

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0t + \varphi(t))$$

$$u(t) = m + n \cos(2\pi f_0t + \varphi(t)) + p \cos(4\pi f_0t + 2\varphi(t)) + q \cos(6\pi f_0t + 3\varphi(t)) + \dots$$

Un filtrage passe bande permet de récupérer le signal FM : $n \cos(2\pi f_0t + \varphi(t))$. On peut ainsi utiliser, pour l'amplification des signaux FM, des amplificateurs de puissance fonctionnant près de la saturation (zone fortement non linéaire), donc avec un très bon rendement : amplificateurs à T.O.P (tubes à ondes progressives) pour les transmissions satellites et les faisceaux hertziens.

3.3 Analyse spectrale du signal FM

3.3.1 Développement en série de Fourier d'un signal FM

Soit un signal FM :

$$s(t) = A \cos \left(2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du \right)$$

On ne sait pas calculer le spectre de $s(t)$ pour un signal modulant $m(t)$ quelconque. On effectue le calcul dans le cas d'un signal modulant sinusoïdal :

$$m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$$

Dans ce cas, la fréquence instantanée du signal FM est :

$$F_i(t) = f_0 + k_f m(t) = f_0 + k_f A_m \cos 2\pi f_m t$$

$F_i(t)$ varie de manière sinusoïdale dans un intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ avec :

$$\Delta f = k_f A_m$$

Δf est appelé *excursion maximale en fréquence*. C'est une grandeur proportionnelle à l'amplitude du signal modulant.

On en déduit la phase instantanée du signal FM :

$$\Theta_i(t) = 2\pi \int_0^t F_i(u) du = 2\pi f_0 t + \frac{k_f A_m}{f_m} \sin 2\pi f_m t$$

On définit l'*indice de modulation* du signal FM :

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m}$$

Le signal FM s'écrit donc :

$$s(t) = A \cos (2\pi f_0 t + \beta \sin 2\pi f_m t)$$

C'est un signal périodique. On montre que son développement en série de Fourier s'écrit :

$$s(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos 2\pi (f_0 + n f_m) t$$

où $J_n(\beta)$ est la *fonction de Bessel* de première espèce d'ordre n .

3.3.2 Les fonctions de Bessel de première espèce

La fonction de Bessel de première espèce d'ordre n est définie par :

$$J_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(jx \sin \theta - jn\theta) d\theta$$

Elle peut être développée en série par :

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!}$$

Elle possède les propriétés suivantes :

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$$

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

$$\text{Pour } x \ll 1, J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!}$$

$$\text{Pour } x \gg 1, J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_n(x) J_m(x) = 1$$

Représentation graphique :

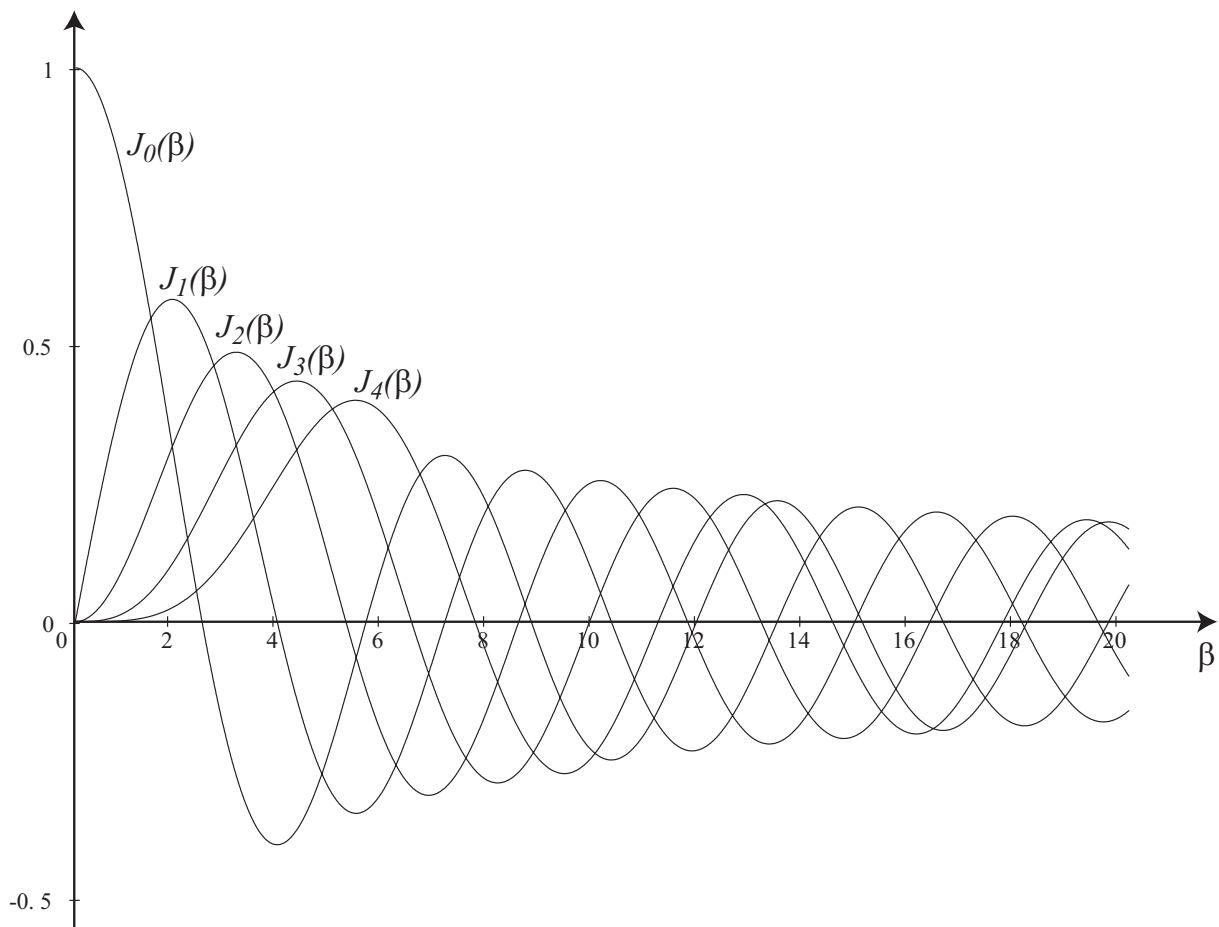


Table des fonctions $J_n(\beta)$ pour différentes valeurs de l'indice β :

$n \setminus \beta$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0	1.000000	0.99002	0.9604	0.912	0.84629	0.7652
1	0	0.099501	0.19603	0.2867	0.36884	0.44005
2	0	0.0049834	0.019735	0.043665	0.075818	0.1149
3	0	0.00016625	0.0013201	0.0043997	0.010247	0.019563
4	0	4.1583e-006	6.6135e-005	0.00033147	0.001033	0.0024766
5	0	8.3195e-008	2.6489e-006	1.9948e-005	8.3084e-005	0.00024976
6	0	1.3869e-009	8.8382e-008	9.9956e-007	5.5601e-006	2.0938e-005
7	0	1.9816e-011	2.527e-009	4.2907e-008	3.1864e-007	1.5023e-006
8	0	2.4774e-013	6.321e-011	1.611e-009	1.5967e-008	9.4223e-008
9	0	2.753e-015	1.4053e-012	5.3755e-011	7.1092e-010	5.2493e-009
10	0	2.7532e-017	2.8116e-014	1.614e-012	2.8478e-011	2.6306e-010
11	0	2.5031e-019	5.1136e-016	4.4047e-014	1.0368e-012	1.198e-011
12	0	2.0861e-021	8.5248e-018	1.1018e-015	3.4597e-014	4.9997e-013
13	0	1.6048e-023	1.3118e-019	2.5439e-017	1.0655e-015	1.9256e-014
14	0	1.1463e-025	1.8744e-021	5.4536e-019	3.0465e-017	6.8854e-016
15	0	7.6424e-028	2.4996e-023	1.0911e-020	8.1294e-019	2.2975e-017
16	0	4.7767e-030	3.1249e-025	2.0465e-022	2.0335e-020	7.1864e-019

$n \setminus \beta$	2	3	4	5	6	7
0	0.22389	-0.26005	-0.39715	-0.1776	0.0.15065	0.30008
1	0.57672	0.33906	-0.066043	-0.32758	-0.27668	-0.0046828
2	0.35283	0.48609	0.36413	0.046565	-0.24287	-0.30142
3	0.12894	0.30906	0.43017	0.36483	0.11477	-0.16756
4	0.033996	0.13203	0.28113	0.39123	0.35764	0.1578
5	0.0070396	0.043028	0.13209	0.26114	0.36209	0.3479
6	0.0012024	0.011394	0.049088	0.13105	0.24584	0.3392
7	0.00017494	0.0025473	0.015176	0.053376	0.12959	0.23358
8	2.218e-005	0.00049344	0.0040287	0.018405	0.056532	0.12797
9	2.4923e-006	8.4395e-005	0.0009386	0.0055203	0.021165	0.058921
10	2.5154e-007	1.2928e-005	0.00019504	0.0014678	0.006964	0.023539
11	2.3043e-008	1.794e-006	3.6601e-005	0.00035093	0.0020479	0.0083348
12	1.9327e-009	2.2757e-007	6.2645e-006	7.6278e-005	0.00054515	0.0026556
13	1.4949e-010	2.6591e-008	9.8586e-007	1.5208e-005	0.00013267	0.00077022
14	1.0729e-011	2.8802e-009	1.4362e-007	2.8013e-006	2.9756e-005	0.0002052
15	7.183e-013	2.9076e-010	1.9479e-008	4.7967e-007	6.1917e-006	5.059e-005
16	4.506e-014	2.7488e-011	2.4717e-009	7.675e-008	1.2019e-006	1.1612e-005

$n \setminus \beta$	8	9	10	11	12	13
0	0.17165	-0.090334	-0.24594	-0.17119	0.047689	0.20693
1	0.23464	0.24531	0.043473	-0.17679	-0.22345	-0.070318
2	-0.11299	0.14485	0.25463	0.13905	-0.08493	-0.21774
3	-0.29113	-0.18094	0.058379	0.22735	0.19514	0.0033198
4	-0.10536	-0.26547	-0.2196	-0.01504	0.1825	0.21928
5	0.18577	-0.055039	-0.23406	-0.23829	-0.073471	0.13162
6	0.33758	0.20432	-0.014459	-0.20158	-0.24372	-0.11803
7	0.32059	0.32746	0.21671	0.018376	-0.17025	-0.24057
8	0.22345	0.30507	0.31785	0.22497	0.045095	-0.14105
9	0.12632	0.21488	0.29186	0.30886	0.23038	0.066976
10	0.060767	0.12469	0.20749	0.28043	0.30048	0.23378
11	0.025597	0.062217	0.12312	0.20101	0.27041	0.29269
12	0.0096238	0.027393	0.06337	0.1216	0.19528	0.26154
13	0.0032748	0.01083	0.028972	0.064295	0.12015	0.19015
14	0.0010193	0.0038946	0.011957	0.030369	0.06504	0.11876
15	0.0002926	0.0012864	0.004508	0.013009	0.031613	0.065644
16	7.8006e-005	0.0003933	0.0015668	0.00511	0.013991	0.032725

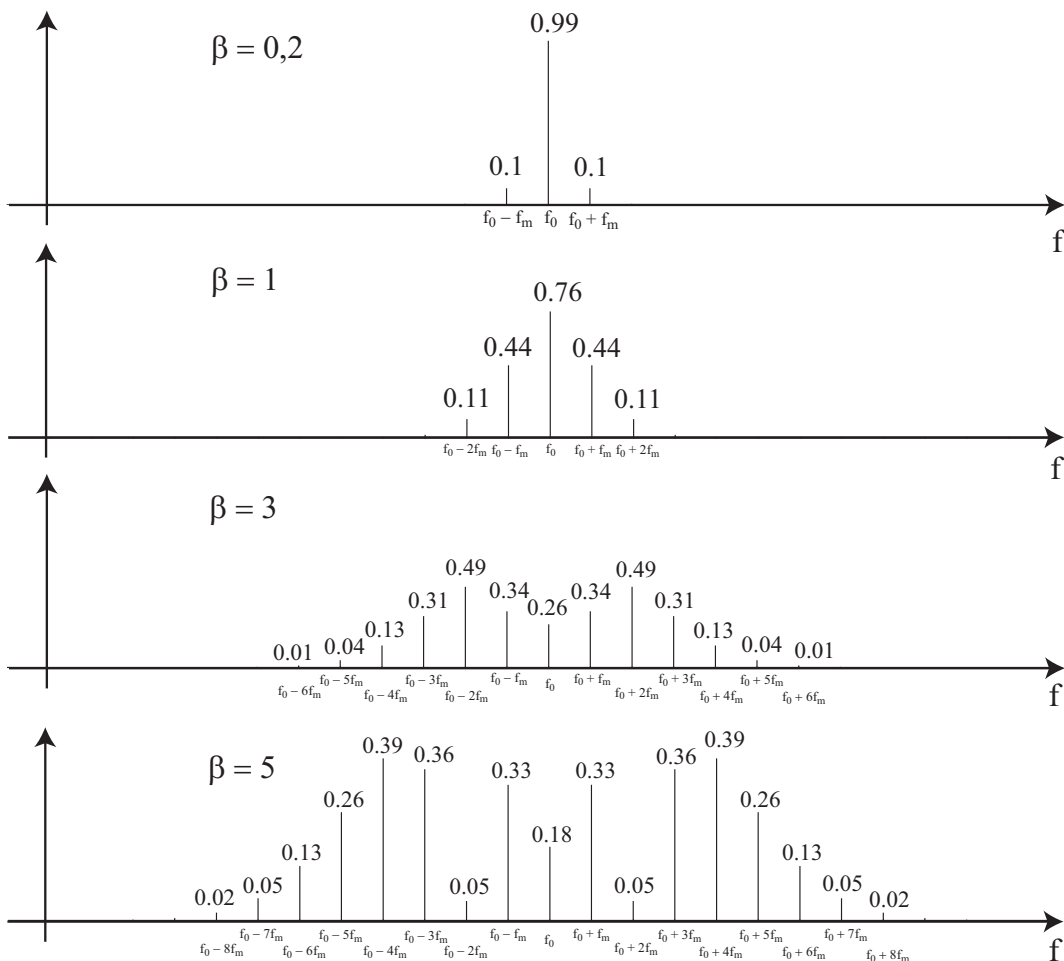
3.3.3 Représentation spectrale du signal FM

D'après les propriétés des fonctions de Bessel :

- le spectre du signal FM modulé par un signal sinusoïdal de fréquence f_m est constitué d'une infinité de raies distantes de f_m , situées aux fréquences $f_0 \pm n f_m$, d'amplitude $A \cdot J_n(\beta)$;
- les raies symétriques aux fréquences $f_0 + n f_m$ et $f_0 - n f_m$ ont même amplitude mais sont en opposition de phase pour n impair car $J_n(\beta) = (-1)^n J_n(-\beta)$;
- le nombre de raies est infini, mais $J_n(\beta) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ donc le signal FM peut être considéré comme un signal à largeur de bande limitée;
- lorsque l'indice de modulation est faible, c'est-à-dire $\beta \ll 1$, on a :

$$J_0(\beta) \approx 1, J_1(\beta) \approx \frac{\beta}{2} \text{ et } J_n(\beta) \approx 0 \text{ pour } n > 1$$

donc le spectre est constitué d'une raie à la fréquence f_0 de la porteuse et de deux raies latérales aux fréquences $f_0 - f_m$ et $f_0 + f_m$: il ressemble à un signal AM double bande avec porteuse sauf que les raies latérales sont en opposition de phase car $J_{-1}(\beta) = -J_1(\beta)$. Un tel signal est appelé *signal FM à bande étroite* (NBFM : *Narrow Band FM*).



3.3.4 Occupation spectrale utile du signal FM

Le signal FM possède théoriquement une occupation spectrale infinie (nombre de raies infini), il nécessite donc un canal de transmission possédant une bande passante infinie : irréalisable en pratique.

La transmission du signal FM se fait donc en remarquant que, pour une valeur donnée de l'indice de modulation β , l'amplitude des raies spectrales devient de plus en plus faible lorsqu'on s'éloigne de la fréquence de la porteuse. On peut donc négliger les raies dont le rang est supérieur à une certaine valeur qui reste à déterminer en fonction de β .

Soit $N(\beta)$ le nombre de raies significatives de part et d'autre de la porteuse. L'occupation spectrale utile du signal FM est donc :

$$B_s = 2N(\beta)f_m$$

Il existe différents critères de détermination de $N(\beta)$, par exemple la *règle de Carson* : pour mesurer $N(\beta)$, on ne garde que les raies dont la somme des puissances constitue au moins 98 % de la puissance totale du signal FM.

En utilisant le développement en série de Fourier du signal FM, la puissance de celui-ci s'écrit :

$$P_{FM} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{[A \cdot J_n(\beta)]^2}{2} = \frac{A^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)^2 = \frac{A^2}{2} \left(\text{car } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)^2 = 1 \right)$$

Le nombre $N(\beta)$ de raies significatives selon la règle de Carson est donc défini par l'inégalité :

$$\underbrace{\frac{A^2}{2} \sum_{n=-N(\beta)}^{+N(\beta)} J_n(\beta)^2}_{\text{puissance des raies significatives}} \geq \underbrace{0,98 \cdot \frac{A^2}{2}}_{98\% \text{ de la puissance totale}}$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{n=-N(\beta)}^{+N(\beta)} J_n(\beta)^2 \geq 0,98$$

ou encore :

$$J_0(\beta)^2 + 2 \sum_{n=1}^{N(\beta)} J_n(\beta)^2 \geq 0,98$$

car, pour $n > 1$, on a $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$ donc $J_{-n}(\beta)^2 = J_n(\beta)^2$.

En utilisant la table des fonctions de Bessel, on trouve que :

$$N(\beta) = \beta + 1$$

d'où :

$$B_s = 2(\beta + 1)f_m$$

Puisque $\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$, on a également :

$$B_s = 2 \left(\frac{\Delta f}{f_m} + 1 \right) f_m = 2(\Delta f + f_m) = 2(k_f A_m + f_m)$$

L'occupation spectrale du signal FM dépend donc de deux grandeurs :

- l'excursion en fréquence Δf , proportionnelle à l'amplitude du signal modulant ;
- la fréquence f_m du signal modulant.

Dans le cas d'un signal FM à faible indice ($\beta \ll 1$), on a $B_s = 2(\beta + 1)f_m \approx 2f_m$: on retrouve l'occupation spectrale d'un signal AM.

Dans le cas d'un signal FM à grand indice ($\beta \gg 1$), on a $B_s = 2(\beta + 1)f_m \approx 2\beta f_m = 2k_f A_m$ donc l'occupation spectrale d'un signal FM à grand indice de modulation (appelé signal WBFM : *Wide Band FM*) est proportionnelle à l'amplitude du signal modulant. Ce dernier résultat est connu sous le nom de *théorème de Woodward*.

3.3.5 Généralisation

Dans le cas d'un signal modulant $m(t)$ quelconque, on peut utiliser pour déterminer l'occupation spectrale utile du signal FM, le résultat trouvé dans le cas d'un signal modulant sinusoïdal en définissant l'*indice de modulation généralisé* :

$$\beta = \frac{\Delta f}{B_m} = \frac{k_f |m(t)|_{max}}{B_m}$$

avec :

- $\Delta f = k_f |m(t)|_{max}$: excursion maximale de la fréquence instantanée ;
- B_m : occupation spectrale du signal modulant.

La règle de Carson donne :

$$B_s = 2(\Delta f + B_m)$$

Exemple de calcul : en radiodiffusion FM dans la bande 88 – 108 MHz, on a $\Delta f = 75$ kHz et $B_m = 15$ kHz (norme HI-FI : haute fidélité). Dans ce cas, on a :

$$\beta = \frac{\Delta f}{B_m} = \frac{75}{15} = 5$$

et :

$$B_s = 2(\Delta f + B_m) = 2 \times (75 + 15) = 180 \text{ kHz}$$

La valeur ainsi déterminée constitue une estimation de B_s . Il reste nécessaire d'effectuer des mesures pour chaque cas particulier.

3.4 Génération du signal FM

3.4.1 Principe

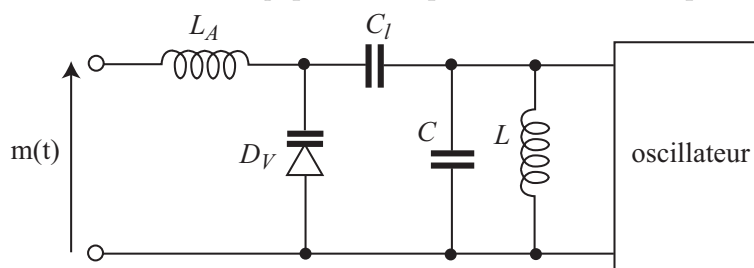
Générer un signal FM consiste à transformer des variations de tension en variations de fréquence. La transformation *tension* $u \rightarrow$ *fréquence* f doit être linéaire :

$$f(u) = f_0 + k_f \cdot u$$

Pour $u = 0$, $f = f_0$: le modulateur FM délivre la porteuse non modulée, k_f est appelé *sensibilité* du modulateur (en Hz/V) et mesure la variation de fréquence Δf produite par une variation de tension Δu .

3.4.2 Méthode par variation de paramètres

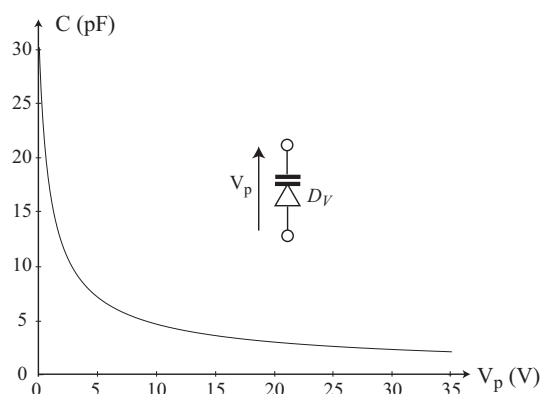
Le signal FM est obtenu en faisant varier la fréquence d'un oscillateur LC en agissant sur la valeur de la capacité qui détermine la fréquence d'oscillation. L'élément à capacité variable utilisé est une *diode varicap* placée en parallèle avec la capacité du circuit LC :



La diode varicap se comporte comme une capacité dont la valeur dépend de la tension inverse V_p appliquée entre ses bornes. La capacité d'une diode varicap est :

$$C(V_p) = \frac{C_0}{\left(1 + \frac{V_p}{V_0}\right)^n}$$

où C_0 , V_0 et n sont des constantes. Par exemple, pour la diode BB909A : $C_0 = 30$ pF, $V_0 = 700$ mV et $n = 0,7$.



Le condensateur de liaison C_l , d'impédance négligeable en haute fréquence, permet d'éviter que l'inductance L ne court-circuite le signal modulant $m(t)$. L'inductance d'arrêt L_A (self de choc), d'impédance négligeable en basse fréquence, présente une impédance élevée en haute fréquence afin de ne pas court-circuiter le signal de l'oscillateur par la source du signal modulant.

La fréquence de l'oscillateur est égale à la fréquence de résonance du circuit LC donc :

$$f(V_p) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L[C + C(V_p)]}} \quad \text{avec } V_p = m(t)$$

En utilisant l'approximation $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ pour $x \ll 1$, avec un signal modulant de faible amplitude $V_p \ll V_0$, on a :

$$C(V_p) = \frac{C_0}{\left(1 + \frac{V_p}{V_0}\right)^n} = C_0 \left(1 + \frac{V_p}{V_0}\right)^{-n} \approx C_0 \left(1 - \frac{nV_p}{V_0}\right)$$

donc :

$$\begin{aligned}
 f(V_p) &\approx \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left[C + C_0\left(1 - \frac{nV_p}{V_0}\right)\right]}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(C + C_0 - \frac{nC_0}{V_0}V_p\right)}} \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_0)\left[1 - \frac{nC_0}{(C + C_0)V_0}V_p\right]}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_0)}} \left[1 - \frac{nC_0}{(C + C_0)V_0}V_p\right]^{-\frac{1}{2}} \\
 &\approx \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_0)}} \left[1 + \frac{nC_0}{2(C + C_0)V_0}V_p\right]
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(V_p) \approx f_0 + k_f V_p = f_0 + k_f m(t)$$

avec :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_0)}}$$

et

$$k_f = \frac{nC_0 f_0}{2(C + C_0)V_0}$$

La fréquence de l'oscillateur est une fonction linéaire du signal modulant $m(t)$. L'oscillateur délivre donc bien un signal FM. Un tel oscillateur est appelé *oscillateur commandé en tension* ou VCO (*Voltage Controlled Oscillator*).

Application : on veut transmettre un signal d'amplitude $A_m = 10$ mV sur une porteuse de fréquence $f_0 = 98$ MHz avec une excursion en fréquence $\Delta f = 75$ kHz. Déterminer les valeurs de L et C dans le cas où une diode varicap BB109A est utilisée.

On a : $\Delta f = k_f A_m$, d'où $k_f = \frac{\Delta f}{A_m} = \frac{75}{10} = 7,5$ kHz/mV. Des expressions de f_0 et k_f trouvées précédemment, on déduit :

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_0} \left(1 - \frac{2k_f V_0}{n f_0}\right) \approx 74,4 \text{ nH}$$

et

$$C = \frac{C_0}{\frac{n f_0}{2k_f V_0} - 1} \approx 5,42 \text{ pF}$$

Avantage de cette méthode : elle permet d'obtenir des excursions en fréquence importantes.

Inconvénient : les caractéristiques de l'oscillateur varient avec le temps à cause du vieillissement des composants, des variations de température ... d'où une dérive de la fréquence de la porteuse.

3.4.3 Modulateur d'Armstrong

Cette méthode est basée sur la génération d'un signal FM à faible indice de modulation β_1 tel que $\beta_1 \ll 1$.

Soit un signal FM :

$$s(t) = A \cos(2\pi f_1 t + \varphi(t))$$

avec :

$$\varphi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(u) du$$

Dans le cas d'un signal modulant sinusoïdal $m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$, on a :

$$\varphi(t) = \beta_1 \sin 2\pi f_m t$$

Si $\beta_1 \ll 1$, alors :

$$|\varphi(t)| = |\beta_1 \sin 2\pi f_m t| \leq \beta_1 \ll 1$$

ainsi :

$$|\varphi(t)| \ll 1$$

Le signal FM peut s'écrire :

$$s(t) = A \cos 2\pi f_1 t \cos \varphi(t) - A \sin 2\pi f_1 t \sin \varphi(t)$$

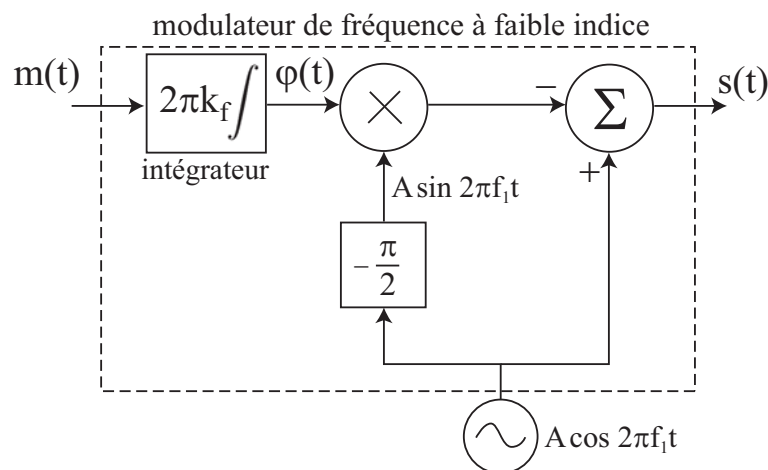
Puisque $|\varphi(t)| \ll 1$, on peut faire les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \cos \varphi(t) \approx 1 \\ \sin \varphi(t) \approx \varphi(t) \end{cases}$$

d'où :

$$s(t) \approx A \cos 2\pi f_1 t - A\varphi(t) \sin 2\pi f_1 t$$

On en déduit le schéma fonctionnel d'un modulateur permettant d'obtenir un signal FM à faible indice de modulation :



Le signal FM à faible indice généré par ce modulateur possède une fréquence porteuse f_1 et une excursion en fréquence $\Delta f_1 = \beta_1 f_m$, donc sa fréquence instantanée varie dans l'intervalle $[f_1 - \Delta f_1, f_1 + \Delta f_1]$.

Pour obtenir un indice de modulation β donné, on multiplie la fréquence du signal FM à faible indice par une valeur n . Ainsi, la fréquence instantanée du signal FM est ramenée dans l'intervalle $[nf_1 - n\Delta f_1, nf_1 + n\Delta f_1]$ donc son excursion en fréquence devient $\Delta f = n\Delta f_1$. L'indice de modulation du signal FM devient alors :

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{n\Delta f_1}{f_m} = n\beta_1$$

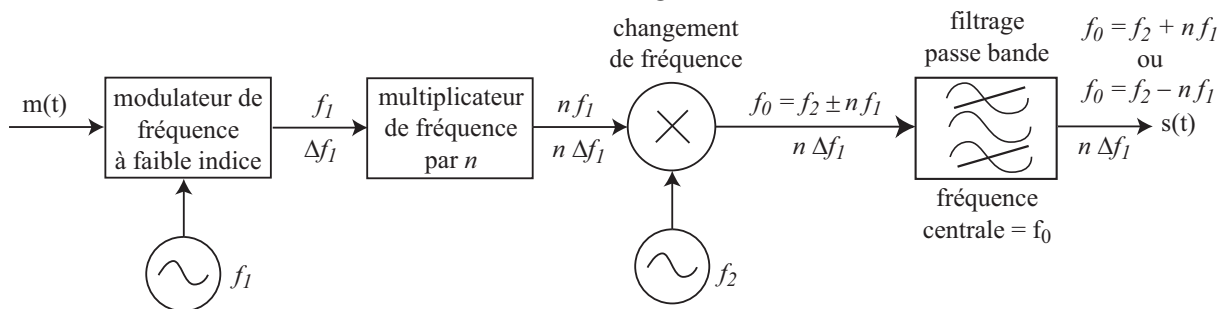
La fréquence porteuse du signal FM ainsi obtenu est nf_1 . Pour obtenir un signal FM de fréquence porteuse f_0 donnée, on effectue un changement de fréquence par une modulation d'amplitude double bande sans porteuse avec une fréquence porteuse f_2 . Le signal FM obtenu possède alors une fréquence porteuse f_0 telle que :

$$f_0 = f_2 \pm nf_1$$

En effectuant un filtrage passe-bande, on peut conserver l'une des deux composantes $f_0 = f_2 - nf_1$ ou $f_0 = f_2 + nf_1$.

Ainsi, en choisissant convenablement les valeurs de n et f_2 , on peut obtenir un signal FM de fréquence porteuse et d'indice de modulation quelconques. Un modulateur FM fonctionnant selon ce principe est appelé *modulateur d'Armstrong*.

Schéma fonctionnel du modulateur d'Armstrong :



Application : le modulateur de fréquence à faible indice délivre un signal FM de fréquence porteuse $f_1 = 0,5$ MHz et d'indice de modulation $\beta_1 = 0,1$. On veut obtenir un signal FM de fréquence porteuse $f_0 = 98$ MHz et d'indice de modulation $\beta = 5$. Calcul de n et f_2 :

$$\beta = n\beta_1 \Rightarrow n = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{5}{0,1} = 50$$

$$f_0 = f_2 \pm nf_1 \Rightarrow f_2 = f_0 \mp nf_1 = \begin{cases} 98 - 50 \times 0,5 = 73 \text{ MHz} \\ 98 + 50 \times 0,5 = 123 \text{ MHz} \end{cases}$$

On choisit en général la fréquence la plus faible, donc on peut prendre $f_2 = 73$ MHz. Le filtre passe bande doit avoir une fréquence centrale $f_c = f_0 = 98$ MHz.

L'avantage du modulateur d'Armstrong réside dans le fait que les oscillateurs utilisés pour générer les fréquences porteuses f_1 et f_2 possèdent une fréquence constante, pouvant donc être fixée avec une grande précision en utilisant par exemple un quartz, d'où une bonne stabilité de la fréquence porteuse du signal FM au cours du temps, contrairement à la méthode par variation de paramètres utilisant une diode varicap.

3.5 Démodulation des signaux FM

3.5.1 Discriminateur

Soit le signal FM :

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

avec :

$$\varphi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(u) du$$

Si on dérive le signal $s(t)$, on obtient :

$$\frac{ds}{dt} = -A \left(2\pi f_0 + \frac{d\varphi}{dt} \right) \sin(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

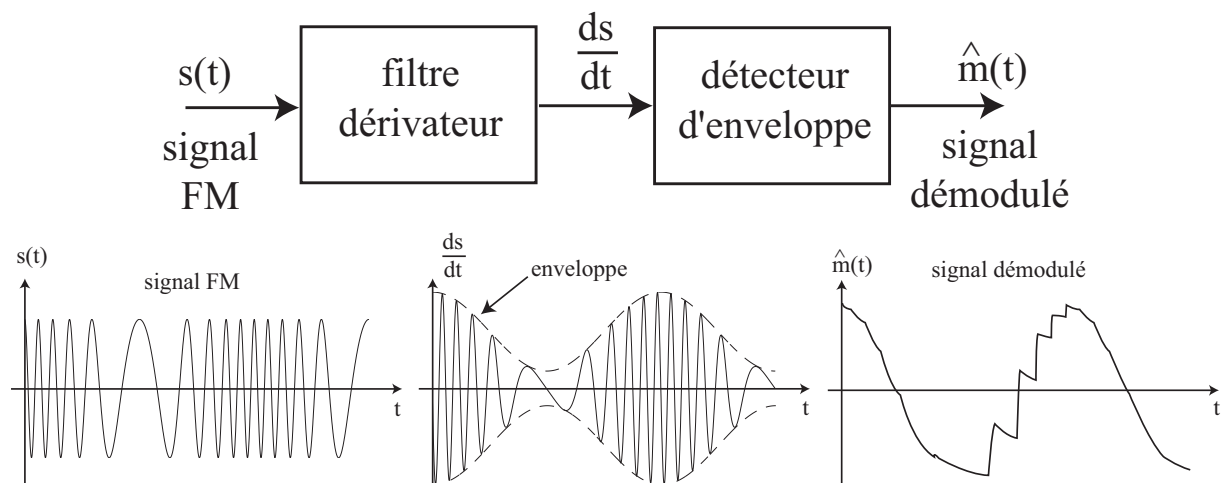
or :

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\pi k_f m(t)$$

donc :

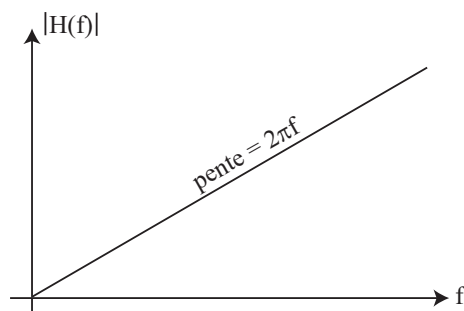
$$\frac{ds}{dt} = -2\pi A [f_0 + k_f m(t)] \sin(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

Le signal $\frac{ds}{dt}$ est un signal FM dont l'enveloppe est une fonction linéaire du signal modulant $m(t)$. Une détection d'enveloppe permet de récupérer $m(t)$. On en déduit le schéma de principe d'un *discriminateur* :

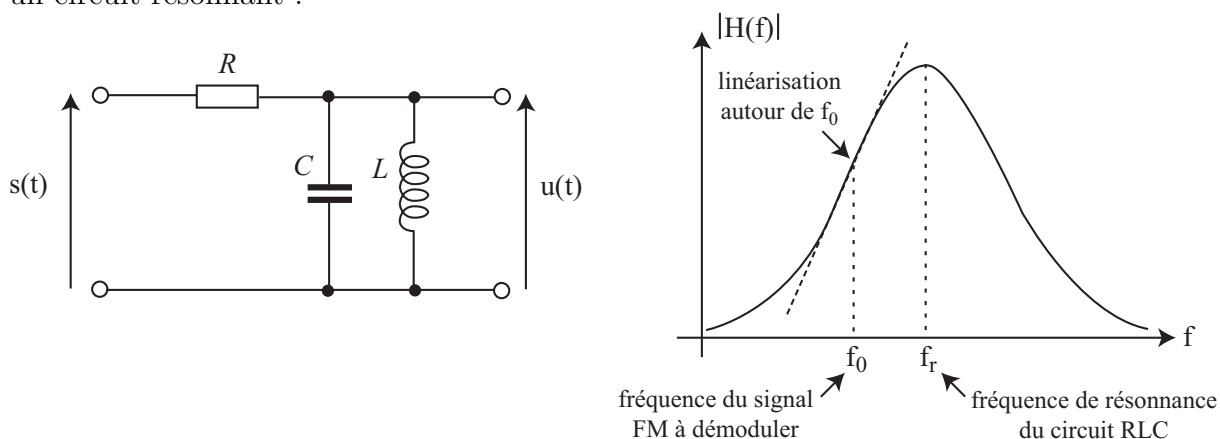


Réalisation pratique du filtre dérivateur : l'opération de dérivation correspond à une multiplication par $j2\pi f$ dans le domaine fréquentiel. La fonction de transfert d'un filtre dérivateur est donc :

$$H(f) = j2\pi f$$

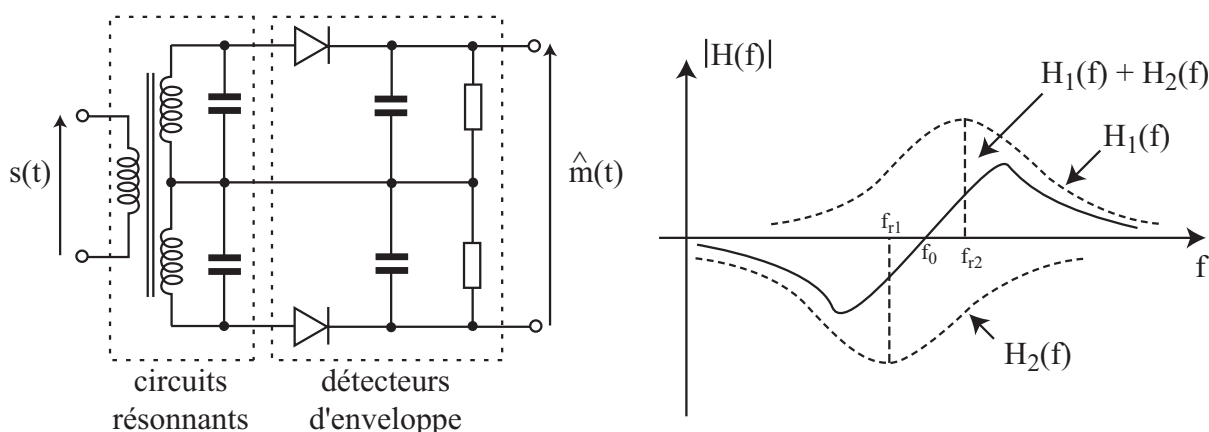


En pratique, on réalise une approximation linéaire autour de la fréquence f_0 en utilisant un circuit résonnant :



On choisit les valeurs de R , L et C de manière à avoir la partie linéaire de la courbe de résonance dans l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$, Δf étant l'excursion en fréquence du signal FM à démoduler. La démodulation du signal FM se fait sur le flanc de la courbe de résonance.

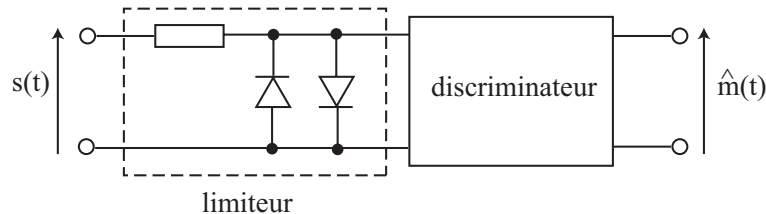
Pour augmenter la plage de linéarité du filtre dérivateur, on peut monter deux circuits résonnants en tête-bêche :



Les deux circuits résonnants de fréquences de résonance f_{r1} et f_{r2} relativement proches restent cependant délicats à régler.

Inconvénient de la démodulation FM par le discriminateur : sensibilité aux variations d'amplitude parasites du signal FM puisque la modulation de fréquence est transformée

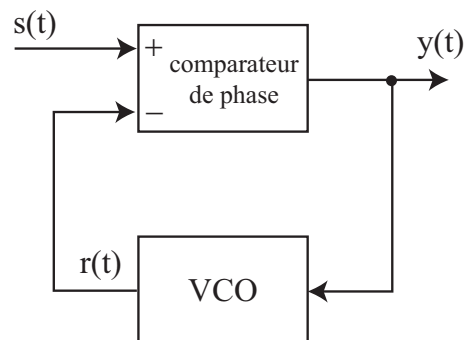
en modulation d'amplitude avant d'être démodulée comme un signal AM par le détecteur d'enveloppe. Pour résoudre ce problème, on fait précéder le discriminateur par un *limiteur* qui permet d'éliminer les variations d'amplitude parasites sans perturber la modulation :



3.5.2 Boucle à verrouillage de phase

La boucle à verrouillage de phase (BVP ou PLL : *Phase Locked Loop*) est utilisée lorsque les conditions de réception du signal FM sont trop difficiles, pour lesquelles le discriminateur ne se comporte plus de manière satisfaisante, par exemple dans le cas des communications par satellites.

Une PLL est un système bouclé constitué d'un *comparateur de phase* et d'un *oscillateur commandé en tension* (VCO) :



On note :

- $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$ avec $\varphi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(u) du$, le signal FM à démoduler ;
- $y(t)$, le signal délivré par le comparateur de phase qui représente la sortie de la PLL ;
- $r(t) = B \cos(2\pi f_0 t + \psi(t))$ avec $\psi(t) = 2\pi k_0 \int_0^t y(u) du$, le signal de sortie du VCO qui constitue le signal de retour de la PLL.

Le comparateur de phase est un dispositif qui délivre une tension $y(t)$ proportionnelle au déphasage entre les signaux d'entrée :

$$y(t) = K \cdot [\varphi(t) - \psi(t)]$$

où K est la *sensibilité* du comparateur de phase.

Le VCO est un modulateur FM dont la fréquence porteuse est f_0 , égale à la fréquence porteuse du signal à démoduler, et la sensibilité est k_0 .

La tension en sortie du comparateur de phase est :

$$y(t) = K \cdot [\varphi(t) - \psi(t)] = K \cdot \left(2\pi k_f \int_0^t m(u) du - 2\pi k_0 \int_0^t y(u) du \right)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{dy}{dt} = 2\pi k_f K m(t) - 2\pi k_0 K y(t)$$

ou encore :

$$\frac{dy}{dt} + 2\pi k_0 K y(t) = 2\pi k_f K m(t)$$

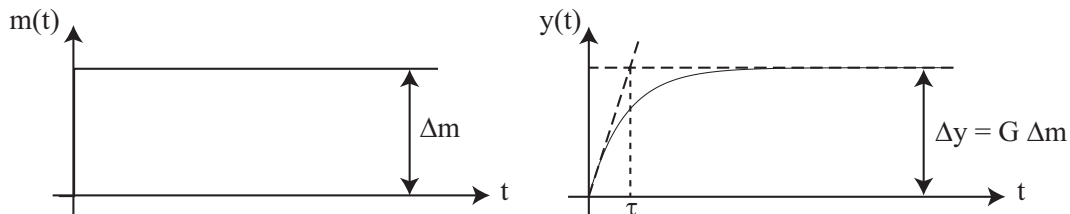
C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On pose :

$$\begin{cases} \tau = \frac{1}{2\pi k_0 K} : \text{constante de temps de la PLL} \\ G = \frac{k_f}{k_0} : \text{gain de la PLL} \end{cases}$$

Ainsi, l'équation de la PLL s'écrit :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = G m(t)$$

Réponse indicielle de la PLL :

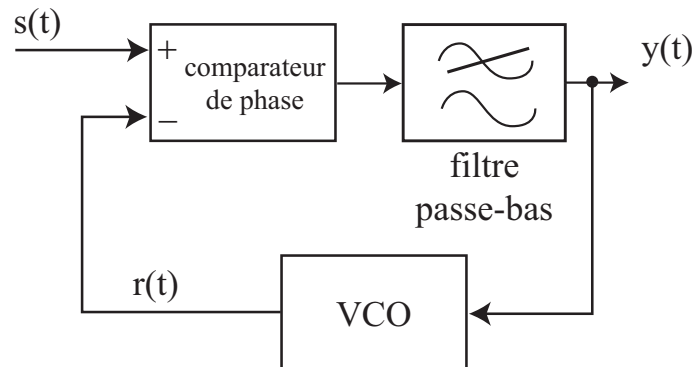


En régime permanent, c'est-à-dire pour $t \geq 3\tau$, on a :

$$\frac{dy}{dt} \approx 0 \Rightarrow 2\pi k_0 K y \approx 2\pi k_f K \Delta m \Rightarrow y \approx \frac{k_f}{k_0} \Delta m = G \Delta m$$

Le signal $y(t)$ en sortie de la PLL présente donc une variation proportionnelle à la variation Δm du signal modulant. Donc si le signal modulant varie assez lentement pour que la PLL puisse atteindre son régime permanent à tout instant, on a bien une démodulation du signal FM.

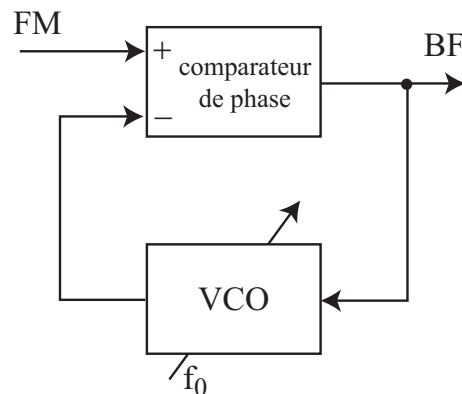
En pratique, on insère dans la chaîne d'action de la PLL un filtre passe-bas qui permet de régler ses performances (temps de réponse, gain, dépassement, ...) :



3.6 Les récepteurs à changement de fréquence

La fonction d'un récepteur radio est de restituer le message transmis à partir du signal HF (porteuse) reçu au niveau de l'antenne. Généralement, le récepteur doit recevoir plusieurs émissions à des fréquences porteuses différentes. Or le démodulateur du récepteur doit fonctionner à la fréquence de la porteuse. Il faudrait donc autant de démodulateurs que d'émissions à recevoir : difficile à réaliser en pratique. Deux solutions existent pour résoudre ce problème.

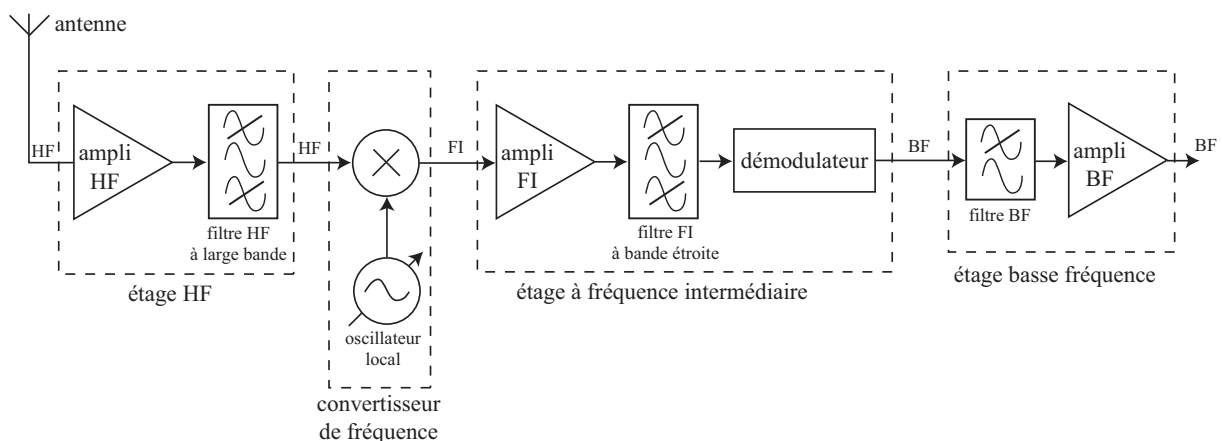
La première solution consiste à changer les caractéristiques du démodulateur : c'est le cas des *récepteurs à conversion directe*. On peut, par exemple, faire varier la fréquence centrale de la PLL d'un démodulateur FM :



Cette solution reste cependant délicate à mettre en œuvre techniquement.

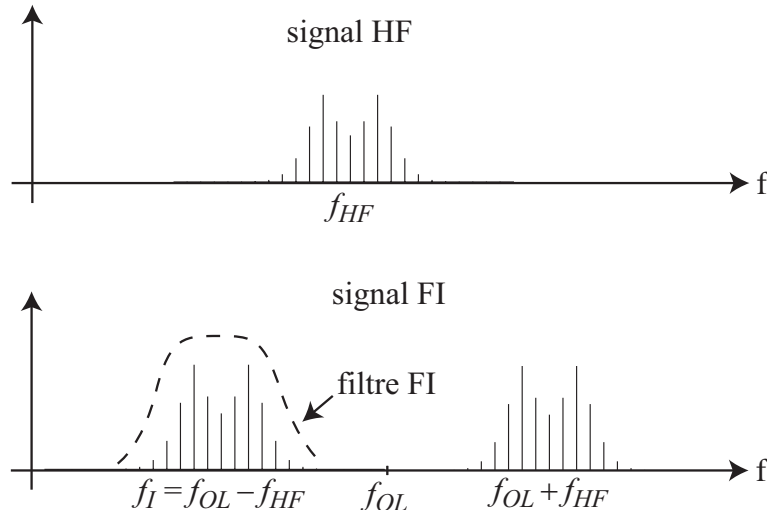
La deuxième solution consiste à changer la fréquence du signal reçu pour l'adapter à un démodulateur dont les caractéristiques restent fixes : c'est le cas d'un *récepteur à changement de fréquence* ou *récepteur superhétérodyne* dont la fréquence du démodulateur, appelée *fréquence intermédiaire* (FI), reste constante.

Schéma fonctionnel d'un récepteur superhétérodyne :



Fonctionnement : le signal HF est multiplié par un signal sinusoïdal délivré par un *oscillateur local* de fréquence f_{OL} . On obtient deux signaux aux fréquences $f_{OL} - f_{HF}$ et $f_{OL} + f_{HF}$. Le signal à la fréquence $f_{OL} + f_{HF}$ est éliminé par le filtre FI à bande étroite. On obtient le signal à fréquence intermédiaire de fréquence $f_I = f_{OL} - f_{HF}$.

Pour garder la fréquence f_I constante, on fait varier f_{OL} de manière à avoir $f_{OL} = f_{HF} + f_I$. Ainsi, pour choisir l'émission à démoduler, on agit sur la fréquence de l'oscillateur local. En pratique, on a $f_I = 10,7$ MHz pour la réception FM et $f_I = 455$ kHz pour la réception AM.



Exemple de calcul : pour la réception d'un signal FM à 96 MHz, on doit avoir $f_{OL} = 96 + 10,7 = 106,7$ MHz.

3.7 La modulation de phase

3.7.1 Principe

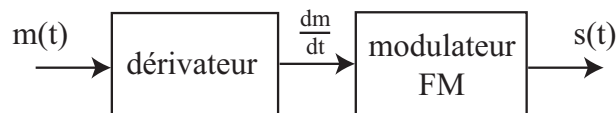
Soit un signal $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$. En modulation de phase (PM : *Phase Modulation*), le déphasage $\varphi(t)$ est proportionnel au signal modulant :

$$\varphi(t) = k_p m(t)$$

Le signal PM a donc pour expression :

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + k_p m(t))$$

Pour générer un signal PM, on peut utiliser un modulateur FM dont le signal d'entrée est la *dérivée* du signal modulant :



En effet :

$$s(t) = A \cos \left(2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_0^t \frac{dm}{du} du \right) = A \cos (2\pi f_0 t + 2\pi k_f m(t))$$

C'est un signal PM avec $k_p = 2\pi k_f$.

Les modulations FM et PM sont appelées *modulations angulaires*.

3.7.2 Occupation spectrale du signal PM

Dans le cas d'un signal modulant sinusoïdal $m(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$, le signal PM devient :

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + k_p A_m \cos 2\pi f_m t)$$

On note $\beta_{PM} = k_p A_m$ l'indice de modulation du signal PM. Celui-ci s'écrit alors :

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \beta_{PM} \cos 2\pi f_m t)$$

D'après la règle de Carson, on déduit l'occupation spectrale d'un signal PM :

$$B_{PM} = 2(\beta_{PM} + 1)f_m = 2(k_p A_m + 1)f_m$$

3.8 Exercices

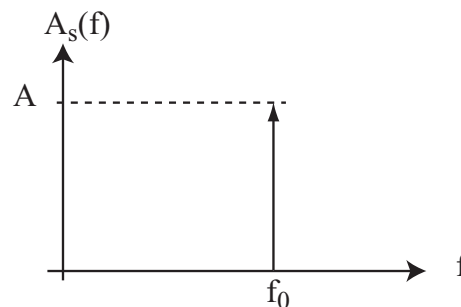
3.8.1 Mesure de la sensibilité d'un modulateur de fréquence

Soit $s(t)$ un signal FM, de fréquence centrale f_0 , modulé par une sinusoïde de fréquence $f_m = 1$ kHz et d'amplitude A_m .

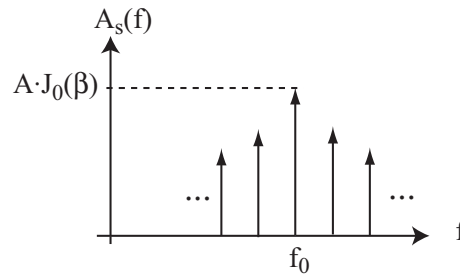
1. Tracer le spectre de $s(t)$ lorsque $A_m = 0$.
2. Que devient ce spectre lorsque A_m augmente ?
3. Comment varie l'amplitude de la raie à la fréquence f_0 ?
4. On donne les trois premières solutions de l'équation $J(x) = 0$: $x_1 = 2,4$; $x_2 = 5,5$; $x_3 = 8,7$. En déduire une méthode pratique de mesure de la sensibilité k_f du modulateur.
5. On mesure $k_f = 0,5$ kHz/mV. Déterminer l'occupation spectrale de $s(t)$ pour $A_m = 30$ mV.

Correction :

1. Lorsque $A_m = 0$, le modulateur FM délivre la porteuse non modulée, c'est-à-dire un signal sinusoïdal pur :



2. Lorsque A_m augmente, les raies latérales apparaissent autour de f_0 :



3. D'après le spectre du signal FM, la raie à la fréquence f_0 de la porteuse varie proportionnellement à la fonction de Bessel $J_0(\beta)$:

$$A_s(f_0) = A \cdot J_0(\beta)$$

4. Lorsque la raie à la fréquence f_0 de la porteuse s'annule, on a alors :

$$J_0(\beta) = 0 \Rightarrow \beta = 2, 4 \Rightarrow \frac{k_f A_m}{f_m} = 2, 4 \Rightarrow k_f = 2, 4 \cdot \frac{f_m}{A_m}$$

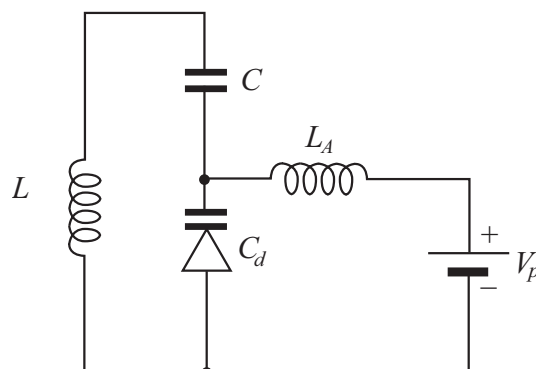
Il suffit donc d'injecter à l'entrée du modulateur FM un signal modulant de fréquence f_m donnée et de faire varier son amplitude A_m à partir de 0 tout en observant le spectre du signal FM sur un analyseur de spectre. On relève alors la valeur de A_m pour laquelle l'amplitude de la raie centrale du spectre s'annule une première fois et on en déduit la valeur de la sensibilité k_f du modulateur à partir de la dernière égalité.

5. D'après la règle de Carson, on a :

$$B_s = 2(\Delta f + f_m) = 2(k_f A_m + f_m) = 2 \times (0,5 \times 30 + 1) = 32 \text{ kHz}$$

3.8.2 Modulateur FM à diode varicap

On considère le circuit résonnant LC suivant, utilisé dans la réalisation d'un oscillateur :



La diode varicap se comporte comme un condensateur de capacité $C_d = \frac{K}{(V_0 + V_p)^{0,5}}$ où K et V_0 sont des constantes et V_p est la tension de polarisation. Cette diode est utilisée dans

le circuit résonnant où L_A est une self d'arrêt d'impédance négligeable en basse fréquence et élevée à la fréquence d'oscillation f_0 . On donne : $L = 0,32 \mu\text{H}$, $C = 10\,000 \text{ pF}$, $V_0 = 0,36 \text{ V}$. Pour $V_p = 0 \text{ V}$, on a $C_d = 1\,500 \text{ pF}$.

1. Exprimer la fréquence d'oscillation f_0 du circuit et montrer qu'elle se met sous la forme $f_0 = A\sqrt{B + (D + V_p)^{0,5}}$. Donner les valeurs numériques de A , B et D . Tracer le graphe de f_0 en fonction de V_p lorsque V_p varie entre 0 et 12 V (échelle : 1 V/cm et 1 MHz/cm). Déterminer la valeur de V_p pour avoir une fréquence $f_0 = 15 \text{ MHz}$.
2. La tension V_p est la somme d'une tension continue $V = 7 \text{ V}$ et d'une tension sinusoïdale $v(t)$ d'amplitude $V_m = 0,2 \text{ V}$ et de fréquence $f_m = 20 \text{ kHz}$. Montrer que l'oscillateur est modulé sinusoidalement en fréquence. Donner sa fréquence de repos f_0 et sa sensibilité k_f . Déterminer l'indice de modulation β du signal FM obtenu, ainsi que la bande passante nécessaire pour transmettre ce signal.

Correction :

1. La fréquence d'oscillation du circuit LC est :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{\text{éq}}}} \quad \text{avec} \quad C_{\text{éq}} = \frac{CC_d}{C + C_d}$$

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{C + C_d}{LCC_d} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{C + K(V_0 + V_p)^{-0,5}}{LCK(V_0 + V_p)^{-0,5}} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{C(V_0 + V_p)^{0,5} + K}{LCK} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LK}} \left[(V_0 + V_p)^{0,5} + \frac{K}{C} \right]^{\frac{1}{2}} = A\sqrt{B + (D + V_p)^{0,5}} \end{aligned}$$

$$\text{avec : } A = \frac{1}{2\pi\sqrt{LK}}, \quad B = \frac{K}{C} \quad \text{et} \quad D = V_0$$

Pour $V_p = 0$, on a $C_d = 1\,500 \text{ pF} \Rightarrow 1\,500 \cdot 10^{-12} = \frac{K}{\sqrt{0,36}} \Rightarrow K = 1\,500 \cdot 10^{-12} \times 0,6 = 900 \cdot 10^{-12}$. On a donc :

$$A = \frac{1}{2\pi \times \sqrt{0,32 \cdot 10^{-6} \times 900 \cdot 10^{-12}}} = 9,378 \cdot 10^6$$

$$B = \frac{900 \cdot 10^{-12}}{10\,000 \cdot 10^{-12}} = 0,09$$

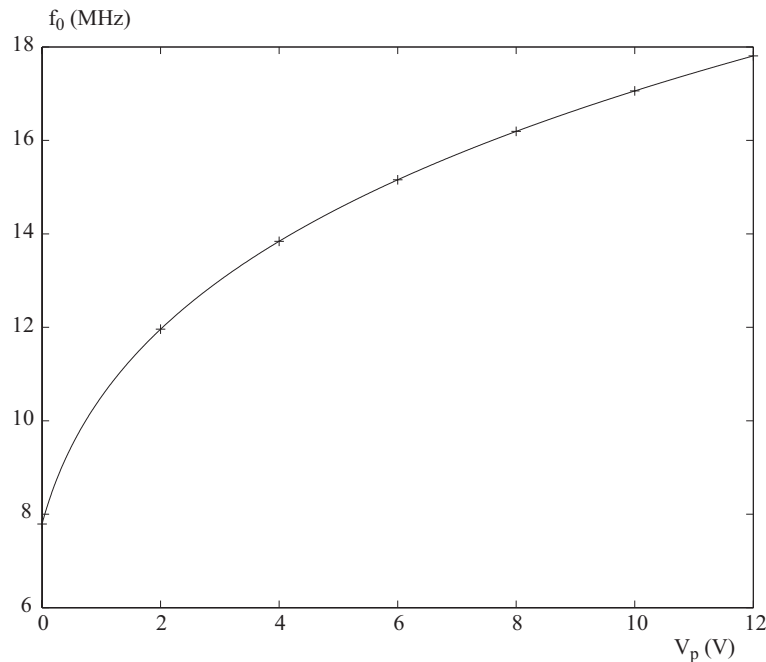
$$D = 0,36$$

Ainsi :

$$f_0 = 9,378 \cdot \left[0,09 + (0,36 + V_p)^{0,5} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{en MHz})$$

Pour représenter f_0 en fonction de V_p , on calcule quelques valeurs :

V_p (en V)	0	2	4	6	8	10	12
f_0 (en MHz)	7,79	11,96	13,84	15,16	16,19	17,06	17,80



Pour avoir $f_0 = 15$ MHz, on peut déterminer V_p graphiquement ou par le calcul :

$$f_0^2 = A^2 [B + (D + V_p)^{\frac{1}{2}}] \Rightarrow V_p = \left(\frac{f_0^2}{A^2} - B \right)^2 - D$$

$$\Rightarrow V_p = \left(\frac{15^2}{9,378^2} - 0,09 \right)^2 - 0,36 = 5,73 \text{ V}$$

2. On a $V_p = V + v(t)$ avec $V = 7$ V et $|v(t)|_{max} = V_m = 0,2$ V $\ll V$. Pour montrer que l'oscillateur est modulé sinusoidalement en fréquence, on peut effectuer un développement limité au premier ordre de $f_0(V_p)$ autour de $V_p = 7$ V.

Rappel : le développement limité au premier ordre d'une fonction $f(x)$ autour d'un point x_0 s'écrit : $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

On a :

$$f_0(V_p) = A [B + (D + V_p)^{0,5}]^{\frac{1}{2}}$$

On en déduit :

$$f_0'(V_p) = A \times 0,5 [B + (D + V_p)^{0,5}]^{-0,5} \times 0,5 (D + V_p)^{-0,5} = \frac{0,25A}{\sqrt{B + (D + V_p)^{0,5}} (D + V_p)^{0,5}}$$

$$= \frac{0,25 A^2}{f_0(V_p) (D + V_p)^{0,5}} \quad \text{car} \quad \sqrt{B + (D + V_p)^{0,5}} = \frac{f_0(V_p)}{A}$$

Ainsi :

$$f_0(V_p) \approx f_0(V) + \frac{0,25 A^2}{f_0(V) (D + V_p)^{0,5}} \cdot \underbrace{(V_p - V)}_{v(t)}$$

Donc :

$$f_0(V_p) \approx f_0(V) + k_f v(t) \quad \text{avec} \quad k_f = \frac{0,25 A^2}{f_0(V) (D + V_p)^{0,5}}$$

La tension $v(t)$ étant sinusoïdale, la fréquence instantanée $f_0(V_p)$ varie sinusoïdalement autour de $f_0(V)$, donc l'oscillateur est modulé en fréquence.

La fréquence de repos de l'oscillateur est :

$$f_0(V) = A\sqrt{B + (D + V)^{0,5}} = 9,378 \times \sqrt{0,09 + (0,36 + 7)^{0,5}} = 15,7 \text{ MHz}$$

Sa sensibilité est :

$$k_f = \frac{0,25 A^2}{f_0(V) (D + V_p)^{0,5}} = \frac{0,25 \times 9,378^2}{15,7 \times \sqrt{0,36 + 7}} = 0,516 \text{ MHz/V}$$

L'indice de modulation du signal FM est :

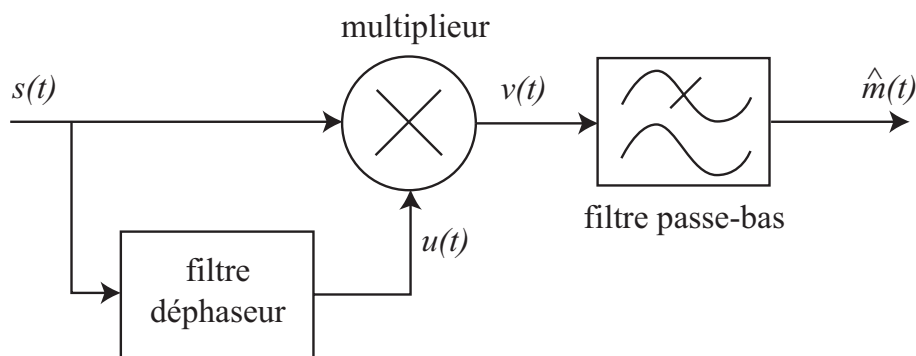
$$\beta = \frac{k_f V_m}{f_m} = \frac{0,516 \cdot 10^6 \times 0,2}{20 \cdot 10^3} = 5,16$$

La bande passante nécessaire pour transmettre le signal FM est :

$$B_s = 2(\beta + 1)f_m = 2 \times (5,16 + 1) \times 20 = 246,4 \text{ kHz}$$

3.8.3 Démodulateur FM quadratique

Soit le démodulateur FM suivant, appelé démodulateur quadratique :



$s(t)$ est le signal FM à démoduler, donné par l'expression $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$ avec $\varphi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\theta) d\theta$. Le filtre déphaseur est caractérisé par une fonction de transfert

$$H(f) \text{ telle que, pour } f_0 - \Delta f \leq f \leq f_0 + \Delta f : \begin{cases} |H(f)| = H_0 = \text{cste} \\ \angle H(f) = \frac{\pi}{2} - \alpha(f - f_0) \quad \text{avec } \alpha > 0 \end{cases},$$

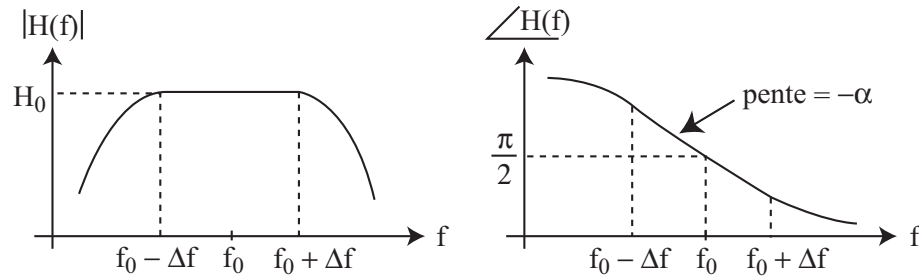
où Δf est l'excursion maximale en fréquence de $s(t)$.

1. Tracer l'allure de $|H(f)|$ et $\angle H(f)$. Comment peut-on réaliser en pratique un tel filtre ?

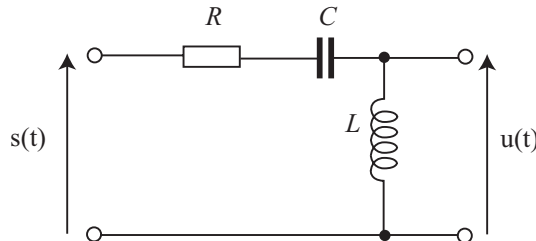
2. Donner l'expression de la phase instantanée du signal déphasé $u(t)$ et en déduire l'expression du signal $v(t)$ en sortie du multiplieur.
3. Donner l'expression de $\hat{m}(t)$ en sortie du filtre passe-bas. En déduire une condition sur α pour que $\hat{m}(t)$ soit proportionnel à $m(t)$.

Correction :

1. Allure de $|H(f)|$ et $\angle H(f)$:



Réalisation pratique d'un tel filtre :



En posant $\omega = 2\pi f$, la fonction de transfert de ce filtre s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jL\omega}{R + j\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}}$$

Le déphasage introduit par ce filtre est :

$$\angle H(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega}$$

On pose $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (fréquence de résonance du filtre) et $\Delta\omega \ll \omega_0$. On a alors, en négligeant les termes en $\Delta\omega^2$ et sachant que $LC\omega_0^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega} &= \frac{LC(\omega_0^2 + 2\omega_0\Delta\omega + \Delta\omega^2) - 1}{RC(\omega_0 + \Delta\omega)} \approx \frac{LC\omega_0^2 + 2LC\omega_0\Delta\omega - 1}{RC\omega_0\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)} = \frac{2L\Delta\omega}{R\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)} \\ &\approx \frac{2L\Delta\omega}{R} \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) = \frac{2L\Delta\omega}{R} - \frac{2L\Delta\omega^2}{R\omega_0} \approx \frac{2L\Delta\omega}{R} \\ \Rightarrow \angle H(\omega) &\approx \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2L\Delta\omega}{R} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{2L}{R}\Delta\omega \quad \text{si} \quad \frac{2L\Delta\omega}{R} \ll 1 \quad \text{c.à.d.} \quad \Delta\omega \ll \frac{R}{2L} \\ (\text{car } \arctan x &\approx x \text{ pour } x \ll 1) \Rightarrow \angle H(\omega) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{2L}{R}(\omega - \omega_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi L}{R}(f - f_0) \end{aligned}$$

Donc, on a bien :

$$\angle H(f) \approx \frac{\pi}{2} - \alpha(f - f_0) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{4\pi L}{R} \quad \text{et} \quad \Delta f \ll \frac{R}{4\pi L}$$

De même, on a :

$$|H(\omega)| = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}\right)^2}} \approx \frac{L(\omega_0 + \Delta\omega)}{\sqrt{R^2 + 4L^2\Delta\omega^2}} \quad \text{car} \quad \frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega} \approx 2L\Delta\omega$$

or, on a :

$$\Delta\omega \ll \frac{R}{2L} \Rightarrow 4L^2\Delta\omega^2 \ll R^2 \Rightarrow |H(\omega)| \approx \frac{L}{R}(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \frac{L\omega_0}{R} = |H(\omega_0)|$$

car $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Ainsi, on a bien :

$$|H(f)| \approx |H(f_0)| = H_0 = \text{constante}, \quad \text{pour} \quad \Delta f \ll \frac{R}{4\pi L}$$

On peut donc utiliser un tel filtre *RLC* en choisissant *R*, *L* et *C* tels que :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f_0 \quad \text{et} \quad \frac{R}{L} \gg 4\pi\Delta f$$

2. La phase instantanée de $s(t)$ est :

$$\Theta_s(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t)$$

La phase instantanée de $u(t)$ est :

$$\Theta_u(t) = \Theta_s(t) + \angle H(f_s(t))$$

où $f_s(t)$ est la fréquence instantanée de $s(t)$:

$$\begin{aligned} f_s(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d\Theta_s}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} = f_0 + k_f m(t) \\ \Rightarrow \angle H(f_s(t)) &= \frac{\pi}{2} - \alpha [f_0 + k_f m(t) - f_0] = \frac{\pi}{2} - \alpha k_f m(t) \end{aligned}$$

Ainsi, la phase instantanée du signal déphasé $u(t)$ est :

$$\Theta_u(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t) + \frac{\pi}{2} - \alpha k_f m(t)$$

Le signal $u(t)$ a donc pour expression :

$$u(t) = H_0 A \cos \left(2\pi f_0 t + \varphi(t) + \frac{\pi}{2} - \alpha k_f m(t) \right)$$

Ainsi, le signal $v(t)$ en sortie du multiplieur est :

$$v(t) = s(t) \cdot u(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \cdot H_0 A \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi(t) + \frac{\pi}{2} - \alpha k_f m(t)\right)$$

$$= \frac{H_0 A^2}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha k_f m(t)\right) + \underbrace{\cos\left(4\pi f_0 t + 2\varphi(t) + \frac{\pi}{2} - \alpha k_f m(t)\right)}_{\text{composante HF éliminée par le filtre passe bas}} \right]$$

3. Après filtrage passe bas du signal $v(t)$, on obtient :

$$\hat{m}(t) = \frac{H_0 A^2}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha k_f m(t)\right) = \frac{H_0 A^2}{2} \sin[\alpha k_f m(t)]$$

Le signal démodulé $\hat{m}(t)$ est proportionnel au signal modulant $m(t)$ à condition que :

$$\alpha k_f |m(t)|_{max} \ll 1 \quad \text{c.à.d.} \quad \alpha \Delta f \ll 1 \quad \text{car} \quad k_f |m(t)|_{max} = \Delta f$$

Cette condition est bien vérifiée car on a :

$$\alpha = \frac{4\pi L}{R} \ll \frac{1}{\Delta f}$$

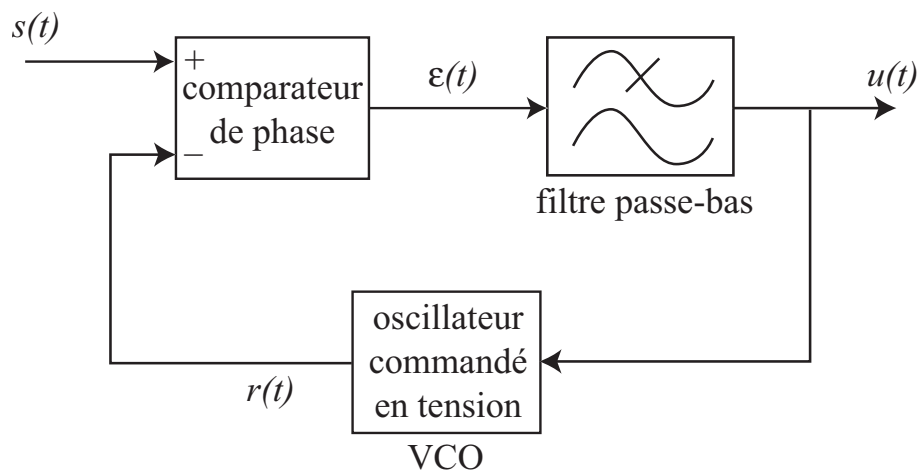
d'après la condition sur le filtre déphaseur.

On peut ainsi appliquer l'approximation $\sin x \approx x$ pour $x \ll 1$. On obtient finalement :

$$\hat{m}(t) \approx \frac{H_0 A^2 \alpha k_f}{2} m(t)$$

3.8.4 Synthèse d'une PLL

On considère la boucle à verrouillage de phase (PLL) représentée par le schéma suivant :



Cette PLL est utilisée pour démoduler un signal FM $s(t) = A \cos \left(2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_0^t m(\theta) d\theta \right)$, avec $k_f = 75$ Hz/V. Le comparateur de phase possède une sensibilité $K = 0,1$ V/rad, le filtre passe-bas est un filtre du premier ordre, caractérisé par une fonction de transfert $H(f) = \frac{G}{1 + j2\pi f\tau}$, le VCO possède une sensibilité $k_0 = 50$ Hz/V. On note $\varepsilon(t)$ le signal délivré par le comparateur de phase, $u(t)$ le signal de sortie du filtre passe-bas et $r(t)$ le signal produit par le VCO.

1. Donner les relations entre les signaux $\varepsilon(t)$, $u(t)$ et $m(t)$. Montrer que $m(t)$ et $u(t)$ sont liés par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{du}{dt} + u = \alpha m(t)$$

dont on exprimera les paramètres ω_0 , ξ et α en fonction de k_0 , k_f , K , G et τ . Quelle est la signification physique de ces paramètres ?

2. Le signal modulant $m(t)$ étant donné par : $m(t) = \begin{cases} M = \text{cste} > 0 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$, tracer l'allure de $u(t)$ pour $\xi < 1$, $\xi = 1$ et $\xi > 1$. Que peut-on dire de $u(t)$?
3. D'après ce qui précède, préciser le rôle du filtre passe-bas et calculer le gain G et la constante de temps τ de ce filtre afin d'assurer à la PLL un amortissement $\xi = 0,8$ et une pulsation naturelle $\omega_0 = 100$ rad/s.

Correction :

1. On a :

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\theta) d\theta$$

$$r(t) = B \cos(2\pi f_0 t + \psi(t)) \quad \text{avec} \quad \psi(t) = 2\pi k_0 \int_0^t u(\theta) d\theta$$

D'après la fonction de transfert du filtre passe bas :

$$H(f) = \frac{u}{\varepsilon} = \frac{G}{1 + j\omega\tau} \Rightarrow u + \tau \frac{du}{dt} = G\varepsilon(t) \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{1}{G} \left[u + \tau \frac{du}{dt} \right]$$

D'autre part :

$$\varepsilon(t) = K(\varphi(t) - \psi(t))$$

$$\Rightarrow K \left[2\pi k_f \int_0^t m(\theta) d\theta - 2\pi k_0 \int_0^t u(\theta) d\theta \right] = \frac{1}{G} \left[u + \tau \frac{du}{dt} \right]$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\pi k_f K G m(t) - 2\pi k_0 K G u(t) &= \frac{du}{dt} + \tau \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \Rightarrow \tau \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + 2\pi k_0 K G u &= 2\pi k_f K G m(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\tau}{2\pi k_0 K G} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{2\pi k_0 K G} \frac{du}{dt} + u &= \frac{k_f}{k_0} m(t) \\ \Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{du}{dt} + u &= \alpha m(t) \end{aligned}$$

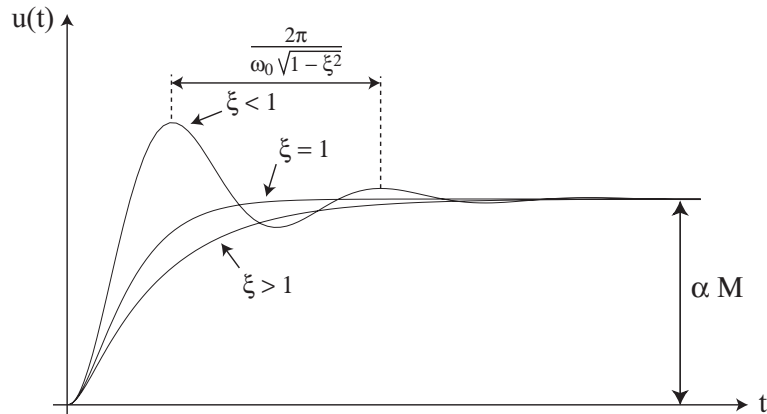
avec : $\omega_0^2 = \frac{2\pi k_0 K G}{\tau}$, $\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi k_0 K G}$ et $\alpha = \frac{k_f}{k_0}$

Les paramètres ω_0 , ξ et α sont respectivement la *pulsation naturelle*, l'*amortissement* et le *gain* de la PLL.

2. Pour $m(t)$ tel que :

$$m(t) = \begin{cases} M = \text{cste} > 0 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

on obtient la réponse indicielle de la PLL :



Après extinction du régime transitoire, on a :

$$u(t) \approx \alpha m(t)$$

Ainsi, si la durée du régime transitoire de la PLL est suffisamment faible, celle-ci permet bien de démoduler le signal FM.

3. Le filtre passe bas permet d'ajuster la réponse indicielle de la PLL pour obtenir les performances désirées en terme de temps de réponse, de dépassement, ...

On a :

$$\begin{aligned} \frac{2\xi}{\omega_0} &= \frac{1}{2\pi k_0 K G} \Rightarrow G = \frac{\omega_0}{4\pi k_0 K \xi} \\ \omega_0^2 &= \frac{2\pi k_0 K G}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{2\pi k_0 K G}{\omega_0^2} = \frac{2\pi k_0 K}{\omega_0^2} \frac{\omega_0}{4\pi k_0 K \xi} = \frac{1}{2\xi \omega_0} \end{aligned}$$

Pour avoir un amortissement $\xi = 0,8$ et une pulsation naturelle $\omega_0 = 100$ rad/s, on doit avoir :

$$G = \frac{100}{4\pi \times 50 \times 0,1 \times 0,8} \approx 2$$

et

$$\tau = \frac{1}{2 \times 0,8 \times 100} = 6,25 \text{ ms}$$

Bibliographie

- [1] P. CLERC et P. XAVIER. *Principes fondamentaux des télécommunications*. Ellipses, Paris, 1998.
- [2] E. FERNANDEZ et M. MATTHIEU. *Les faisceaux hertziens analogiques et numériques*. Dunod, Paris, 1991.
- [3] P. FRAISSE, R. PROTIÈRE, et D. MARTY-DESSUS. *Télécommunications 1 – Transmission de l’information*. Ellipses, Paris, 1999.
- [4] D. VENTRE. *Communications analogiques*. Ellipses, Paris, 1991.