On traitera les questions dans leur ordre naturel, en indiquant clairement quels résultats sont admis. Le problème suit un ordre de difficulté croissante. Les réponses qui pourraient être utiles dans la suite de l'énoncé sont toujours clairement indiquées.

Rappels et notations

Les définitions, notations et propriétés ci-dessous sont rappelées à toutes fins utiles, et aucune démonstration n'est demandée. Dans ces notations, x est un réel quelconque. Sauf indication contraire, tous les entiers considérés dans ce problème sont des entiers *relatifs*.

- On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x (ou encore l'entier "plancher" de x).
  C'est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
  Il est donc caractérisé par $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$, c'est-à-dire par $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$.
- On note $\lceil x \rceil$ l'entier "plafond" de x.
  C'est le plus petit entier supérieur ou égal à x.
  Il est donc caractérisé par $\lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil$, c'est-à-dire par $x \le \lceil x \rceil < x + 1$.
- Il est clair que les applications $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $x \mapsto \lceil x \rceil$ sont croissantes au sens large.
- Pour tout entier p, on a $\begin{cases} \lfloor x \rfloor = p \Leftrightarrow x \in \; [p, p+1[\\ \lceil x \rceil = p \Leftrightarrow x \in \;]p-1, p] \end{cases}$ et $\begin{cases} \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p \\ \lceil x + p \rceil = \lceil x \rceil + p \end{cases}$

Énoncé du problème

1. Pour tout réel x, vérifier que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ et que $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$. [S]
2. Soit x un réel et p un entier. Montrer les équivalences suivantes :
   $$\begin{cases} x \le p \Leftrightarrow \lceil x \rceil \le p \\ x < p \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 1 \le p \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p \le x \Leftrightarrow p \le \lfloor x \rfloor \\ p < x \Leftrightarrow p \le \lceil x \rceil - 1 \end{cases}$$ [S]
3. On note $\mathrm{N}(I)$ le nombre d'entiers distincts appartenant à un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   Soit x et y des réels, avec $x < y$. Calculer $\mathrm{N}(I)$ dans les cas suivants :
   $I =]x, y[, \quad I = [x, y[, \quad I =]x, y], \quad I = [x, y]$.
   On exprimera les réponses en fonction d'un ou plusieurs des entiers $\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor, \lceil x \rceil, \lceil y \rceil$. [S]
4. (a) Soit x un réel, et k, n deux entiers ($n > 0$). Prouver que $\left\lfloor \dfrac{x+k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor + k}{n} \right\rfloor$. [S]
   (b) Montrer que $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$. [S]
5. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application continue et croissante (au sens large) sur $\mathbb{R}$, et telle qu'on ait toujours l'implication $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que pour tout réel x, on a $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$ [S]
   (b) Montrer que pour tout réel x, on a $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$.
   On appréciera une démonstration qui ne serait trop proche de celle de 5.a... [S]
   (c) Retrouver ainsi les résultats des questions 4a et 4b. [S]

6. Soit n un entier strictement positif.

   On se propose de calculer les sommes $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lceil \sqrt{k} \right\rceil$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

   (a) On suppose tout d'abord qu'il existe m dans $\mathbb{N}^*$ tel que $n = m^2$.

   En utilisant une partition de $[1, \ldots, n]$, montrer que $S_n = \dfrac{(m+1)(4m^2 - m)}{6}$. [S]

   (b) Montrer que dans le cas général, $S_n = \dfrac{(m+1)(6n - 2m^2 - m)}{6}$, avec $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. [S]

   (c) Avec ces notations, en déduire que $T_n = \dfrac{m(6n + 5 - 2m^2 - 3m)}{6}$ [S]

7. Dans cette question, x est un réel, m est dans $\mathbb{Z}$ et n est dans $\mathbb{N}^*$.

   On se propose de calculer la somme $U(m,n,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \dfrac{x + km}{n} \right\rfloor$.

   (a) On commence par supposer $m = 1$. Montrer que $U(1,n,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \dfrac{x+k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

   Indication : commencer par examiner le cas où x est dans $\mathbb{Z}$, puis généraliser. [S]

   (b) On suppose maintenant que les entiers m et n sont premiers entre eux (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas d'autre diviseur positif autre que 1.)

   Pour tout k de $\{0, \ldots, n-1\}$ on note $f(k)$ le reste dans la division de km par n.

      i. Montrer que $\left\lfloor \dfrac{x + km}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x + f(k)}{n} \right\rfloor + \dfrac{km}{n} - \dfrac{f(k)}{n}$. [S]

      ii. Montrer que f est une bijection de $\{0, \ldots, n-1\}$ sur lui-même. [S]

      iii. En déduire que $U(m,n,x) = \lfloor x \rfloor + \dfrac{(m-1)(n-1)}{2}$ [S]

   (c) On suppose enfin que les entiers $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sont quelconques.

   On note d le pgcd de m er de n (leur plus grand diviseur commun.)

   Il existe donc deux entiers $m' \in \mathbb{Z}$ et $n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} m = dm' \\ n = dn' \end{cases}$.

   On sait enfin que m' et n' sont premiers entre eux.

      i. En notant $k = n'q + k'$ la division de k par n', montrer que :

      $$U(m,n,x) = \sum_{q=0}^{d-1} \sum_{k'=0}^{n'-1} \left\lfloor \frac{x + (n'q + k')m}{n} \right\rfloor = \sum_{q=0}^{d-1} \left(qm'n' + \sum_{k'=0}^{n'-1} \left\lfloor \frac{x + k'm}{n} \right\rfloor \right)$$ [S]

      ii. En déduire $U(m,n,x) = m'n' \dfrac{d(d-1)}{2} + d\, U\left(m', n', \dfrac{x}{d}\right)$. [S]

      iii. Conclure finalement, avec $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $d = \mathrm{pgcd}(m,n)$:

      $$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x + km}{n} \right\rfloor = d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{mn - m - n + d}{2}.$$ [S]

   Remarque

   Par symétrie, le résultat précédent prouve que pour tout réel x et pour tous entiers m, n strictement positifs, on a l'égalité : $\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \dfrac{x + km}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \dfrac{x + kn}{m} \right\rfloor$.