# Feuille d'exercices n°5

# Dimensions, Bases, Théorème du rang

**Exercice 1:**
Soit $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + z + t = 0\}$ et $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + z - t = 0\}$.

1. Trouver une base de $E_1$, de $E_2$, et de $E_1 \cap E_2$.
2. Soit $E_3 =$ Vect $((24, 0, -13, -11), (31, -21, -10, 0), (0, 0, 27, -27))$. Montrer que $E_3 = E_1$.

**Exercice 2:**
Soit l'application $f$ définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (2x + y, x + z - t, y - 2z + 2t) \end{array}$$

1. Montrer que $f$ est linéaire.
2. Trouver une base de $\mathcal{K}er\, f$.
3. Quelle est la dimension de $\mathcal{I}m\, f$ ? Trouver une base de $\mathcal{I}m\, f$.

**Exercice 3:**
Soit $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\mathcal{I}m\,(g \circ f) \subset \mathcal{I}m\,(g)$ et que $\mathcal{K}er\,(f) \subset \mathcal{K}er\,(g \circ f)$.
2. En déduire que $rg\,(g \circ f) \leq \min\,(rg\,(f), rg\,(g))$.

**Exercice 4:**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$.
Soit $x \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x), ..., \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de $E$.

**Exercice 5:**
Soit $E$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2, et $f$ un endomorphisme non nul de $E$.

1. On suppose que $\mathcal{K}er\, f = \mathcal{I}m\, f$. Que vaut $rg\, f$ ? Trouver une base $\{u, v\}$ de $E$ telle que $f(u) = v$ et $f(v) = 0$. En déduire que $f \circ f = 0$.
2. On suppose que $f \circ f = 0$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $\{u, f(u)\}$ soit une base de $E$. En déduire que $\mathcal{K}er\, f = \mathcal{I}m\, f$.

**Exercice 6:**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Soit l'application $f$ définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$$

1. Montrer que $f$ est linéaire.
2. Déterminer $\mathcal{K}er\, f$ et $\mathcal{I}m\, f$, ainsi que leurs dimensions.
3. Montrer que $dim(E_1 + E_2) = dim(E_1) + dim(E_2) - dim(E_1 \cap E_2)$.
4. En déduire le résultat suivant :

$$E = E_1 \oplus E_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ dim(E) = dim(E_1) + dim(E_2) \end{array} \right.$$

**Exercice 7:**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que : $(\mathcal{K}er\, f = \mathcal{K}er\, f^2) \Longleftrightarrow (\mathcal{I}m\, f = \mathcal{I}m\, f^2)$.
2. Montrer que : $(E = \mathcal{K}er\, f \oplus \mathcal{I}m\, f) \Longrightarrow (\mathcal{K}er\, f = \mathcal{K}er\, f^2)$.
3. En utilisant la question 4 de l'exercice précédent, montrer que la réciproque est vraie.

**Exercice 8:**
Soit $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, ..., n\}$. Soit $E_{ij}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall k, l \in \{1, ..., n\},\ (E_{ij})_{kl} = \delta_{ki}\delta_{lj}, \ \text{ où } \delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner l'allure de la matrice $E_{ij}$.
2. Montrer que la famille $\{E_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On l'appelle base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.