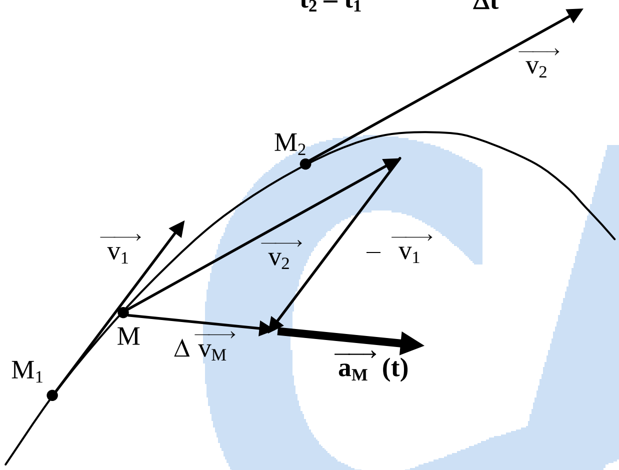
LE VECTEUR ACCELERATION

La notion d'**accélération** prend en compte quantitativement la variation du vecteur vitesse d'un point et la durée de cette variation.

• Définition approchée du vecteur accélération

On considère le mouvement d'un point M dans le référentiel d'étude. Le **vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}$(t) du point M à l'instant t** s'obtient de manière approchée à partir des vecteurs vitesse $\overrightarrow{v_M}(t_1)$ et $\overrightarrow{v_M}(t_2)$ du point M à deux instants t_1 et t_2 voisins de t et encadrant t :

$$\mathbf{\overrightarrow{a_M}(t) = \frac{\overrightarrow{v_M}(t_2) - \overrightarrow{v_M}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \overrightarrow{v_M}}{\Delta t}}$$



Dans le référentiel d'étude, les caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{a_M}$(t) du point M à l'instant t sont :
- <u>origine</u> : le point M ;
- <u>direction</u> : la direction du vecteur variation de vitesse $\Delta\,\overrightarrow{v_M}$;
- <u>sens</u> : le sens du vecteur variation de vitesse $\Delta\,\overrightarrow{v_M}$;
- <u>valeur</u> : $\mathbf{a_M(t)} = \dfrac{\|\Delta \overrightarrow{\mathbf{v_M}}\|}{\Delta \mathbf{t}}$ — $\|\Delta\overrightarrow{\mathbf{v_M}}\|$ en $m.s^{-1}$; Δt en seconde (s) ; a_M accélération en $m.s^{-2}$

• Définition exacte du vecteur accélération

– Le vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}$(t) du point M à l'instant t est déterminé avec d'autant plus d'exactitude que l'intervalle de temps Δt est petit.
Quand $\Delta t \rightarrow 0$, on obtient la définition exacte de $\overrightarrow{a_M}$(t)

$$\overrightarrow{a_M}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\,\overrightarrow{v_M}}{\Delta t} \text{ soit } \mathbf{\overrightarrow{a_M}(t) = \frac{d\,\overrightarrow{v_M}}{dt}}$$

Dans le référentiel d'étude, le vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}$(t) du point M à l'instant t est **le vecteur dérivée du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}$(t) par rapport au temps**.

Dans le cas général, la valeur du vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}$(t) est telle que :

$$a_M(t) = \left\| \frac{d\,\overrightarrow{v_M}}{dt} \right\| \neq \frac{dv_M}{dt}.$$

– Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}$(t) étant lui-même le vecteur dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, on peut relier le vecteur accélération et le vecteur position par :

$$\mathbf{\overrightarrow{a_M}(t)} = \frac{d\,\overrightarrow{v_M}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \mathbf{\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

Dans le référentiel d'étude, le **vecteur accélération** $\overrightarrow{a_M}$(t) du point M à l'instant t est le **vecteur dérivée seconde du vecteur position** $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps.

• Coordonnées du vecteur accélération dans un repère cartésien

Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) associé au référentiel d'étude, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du point M a l'instant t a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) lié au référentiel d'étude, les coordonnées du vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}$ (t) du point M à l'instant t s'obtiennent **en dérivant deux fois par rapport au temps les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.**

La dérivée seconde par rapport au temps étant notée $\frac{d^2}{dt^2}$, ou désignée par deux points, les coordonnées du vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}$ (t) s'écrivent :

$$\overrightarrow{a_M}(t) \begin{vmatrix} a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{vmatrix},$$

soit $\mathbf{\overrightarrow{a_M}(t) = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}}$

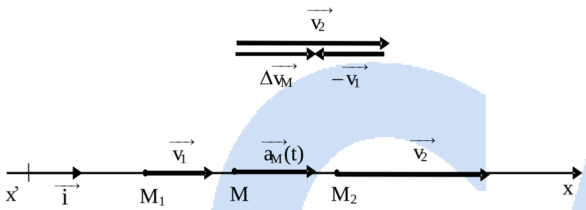
ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS

• Accélération des mouvements uniformes

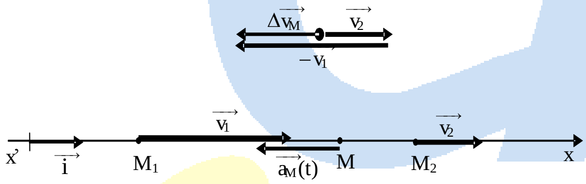
– Si le mouvement du point M est **rectiligne uniforme**, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}(t)$ est constant au cours du temps (en direction, sens et valeur) : le vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}(t)$ **est toujours nul.**
– Si le mouvement du point M est **curviligne uniforme**, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}(t)$, de valeur constante, change de direction à chaque instant : le vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}(t)$ **n'est pas nul.**

• Accélération des mouvements rectilignes

Dans le référentiel d'étude, on considère le mouvement rectiligne d'un point M suivant l'axe x'x, orienté dans le sens du mouvement.



Mouvement rectiligne accéléré



Mouvement rectiligne ralenti

– Si le mouvement est **rectiligne accéléré**, les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v_M}(t)$ et accélération $\overrightarrow{a_M}(t)$ sont **colinéaires et de même sens.**
– Si le mouvement est **rectiligne ralenti,** les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v_M}(t)$ et accélération $\overrightarrow{a_M}(t)$ sont **colinéaires et de sens contraires.**

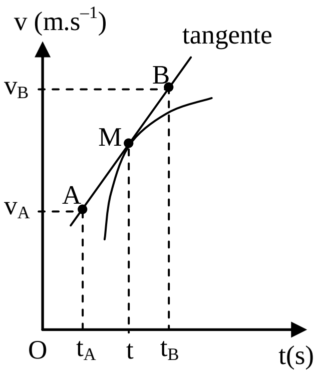
Or, l'axe x'x étant orienté dans le sens du mouvement :

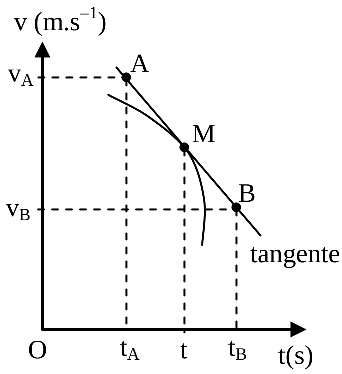
$\overrightarrow{v_M}(t) = v_M\,\overrightarrow{i}$, d'où $\overrightarrow{a_M}(t) = \dfrac{d\,\overrightarrow{v_M}}{dt} = \dfrac{dv_M}{dt}\,\overrightarrow{i}$

et $\mathbf{a_M(t)} = \left|\dfrac{\mathbf{dv_M}}{\mathbf{dt}}\right|$.

En mathématiques, la dérivée d'une fonction en un point **est la pente de la tangente** à la courbe représentative de cette fonction en ce point.

Dans le cas d'un mouvement **rectiligne**, la valeur $a_M(t)$ du vecteur accélération est égale à **la valeur absolue de la pente de la tangente** à la courbe $v_M(t)$ au point d'abscisse t.





$$\mathbf{a_M = \frac{|v_B - v_A|}{t_B - t_A}}$$

Plus la variation de la valeur de la vitesse à un instant est forte, plus la tangente est inclinée par rapport à l'axe des temps (axe des abscisses).

DEUXIEME LOI DE NEWTON (ou théorème du centre d'inertie)

La deuxième loi de Newton relie les causes du mouvement (les forces) à leurs conséquences (le mouvement proprement dit).

Dans **un référentiel galiléen**, la somme des forces $\sum \overrightarrow{F}$ qui s'exercent sur un système matériel à l'instant t est égale au produit de la masse m de ce système par le vecteur accélération $\overrightarrow{a_G}(t)$ de son centre d'inertie G à cet instant :

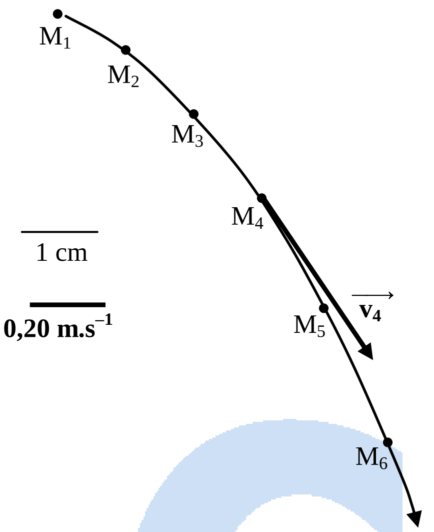
$$\boldsymbol{\sum \overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a_G}(t)}$$

La deuxième loi de Newton ne donne accès qu'au mouvement du centre d'inertie G du système. Cependant, pour un solide en translation, tous les points ont le même mouvement : on a ainsi accès au mouvement d'ensemble du solide.

<u>Remarque :</u>
Si $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{a_G}(t) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{Cte}$: on retrouve bien le principe d'inertie

METHODE
Construire un vecteur vitesse

On se propose d'exploiter l'enregistrement des positions du point M à intervalles de temps égaux τ = 30 ms pour construire le vecteur vitesse du point M à l'instant t_4.



Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}$ (t_4) noté $\vec{v_4}$, se construit de manière approchée en considérant les positions M_3 et M_5 du point M aux instants t_3 et t_5, voisins de t_4 et encadrant t_4 :

$$\mathbf{\vec{V_4} = \frac{\overrightarrow{M_3M_5}}{t_5 - t_3} \approx \frac{\overrightarrow{M_3M_5}}{2\tau}}.$$

– On mesure sur l'enregistrement la distance M_3M_5 : M_3M_5 = 3,1 cm.
Connaissant la valeur de τ, on en déduit celle de v_4 :

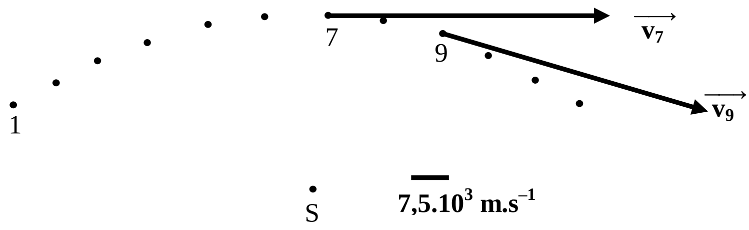
$$V_4 = \frac{M_3M_5}{2\tau}, \text{ soit } v_4 \approx \frac{3{,}1.10^{-2}}{2 \times 30.10^{-3}} \approx 0{,}52 \text{ m.s}^{-1}$$

– On récapitule **les caractéristiques du vecteur vitesse** $\vec{v_4}$ **:**
origine : le point M_4, position du point M à l'instant t_4 ;
direction : la tangente à la trajectoire au point M_4 ;
sens : le sens du mouvement ;
valeur : 0,52 m.s^{-1}

On choisit **une échelle de représentation des vitesses** : par exemple,
1cm $\leftrightarrow$ 0,20 m.s^{-1}. Le vecteur vitesse $\vec{v_4}$ est alors représenté par un segment fléché de longueur
$\frac{0{,}52}{0{,}20}$ = 2,6 cm.

METHODE
Construire un vecteur accélération

On assimile la comète de Halley à un point matériel M en mouvement autour du Soleil. On se propose d'exploiter le relevé des positions de la comète tous les cinq jours pour construire son vecteur accélération à la date t_8 à l'échelle l cm pour 0,50.10^{-2} m.s^{-2}.
Sur la trajectoire on représente les vecteurs vitesse de la comète aux dates t_7 et t_9 à l'échelle 0,5 cm pour 7,5.10^3 m.s^{-1}



Le vecteur accélération $\overrightarrow{a_M}$ (t_8), noté $\vec{a_8}$, se construit de manière approchée en considérant les vecteurs vitesse $\vec{v_7}$ et $\vec{v_9}$ du point M aux instants t_7 et t_9 voisins de t_8 et encadrant t_8 :

$$\mathbf{\vec{a_8} = \frac{\vec{v_9} - \vec{v_7}}{t_9 - t_7} \approx \frac{\Delta \vec{v_8}}{\Delta t}}$$

La comète de Halley met environ 76 ans à décrire son orbite complète autour du Soleil ; on peut considérer qu'une durée de 5 jours est petite comparé à sa période de révolution.

– On reporte **au point M_8 de la trajectoire** les vecteurs vitesse $\vec{v_9}$ et $\vec{v_7}$ parallèlement à eux-mêmes, et on construit le **vecteur variation de vitesse :** $\Delta \vec{v_8} = \vec{v_9} - \vec{v_7}$ (voir page suivante)

– On mesure sur le schéma **la longueur du segment fléché** représentant $\Delta \vec{v_8}$ qui est 1,0 cm. D'après l'échelle des vitesses :

0,5 cm $\leftrightarrow$ 7,5.10^3 m.s^{-1}, soit 1,0 cm $\leftrightarrow$ 1,5.10^4 m.s^{-1}

Connaissant la valeur de Δt, on en déduit **la valeur de a_8** :

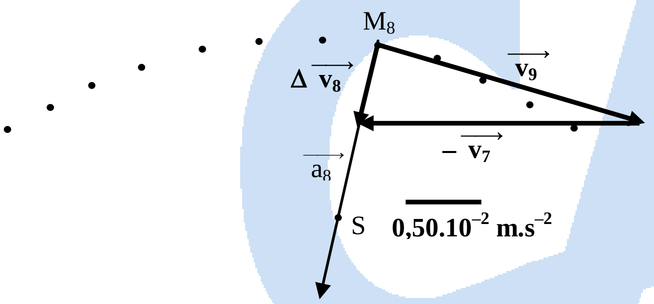
$$a_8 \approx \frac{\|\Delta \vec{v_8}\|}{\Delta t} \approx \frac{1{,}5.10^4}{2 \times 5 \times 24 \times 3600} \approx 1{,}7.10^{-2} \text{ m.s}^{-2}.$$

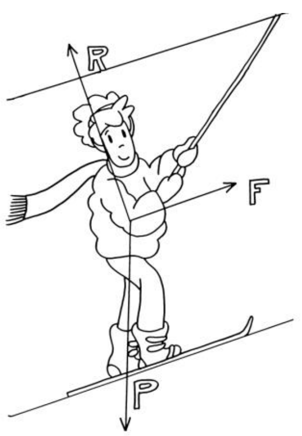
– On récapitule les caractéristiques du vecteur accélération :
origine : le point M_8, position du point M à l'instant t_8 ;
direction : la direction du vecteur variation de vitesse $\Delta \overrightarrow{v_8}$;
sens : le sens du vecteur variation de vitesse $\Delta \overrightarrow{v_8}$;
valeur : $a_8 \approx 1{,}7.10^{-2}$ m.s^{-1}.

– On utilise ensuite **l'échelle de représentation des accélérations** :
1,0 cm $\leftrightarrow$ 0,50.10^{-2} m.s^{-2}

Le vecteur accélération $\overrightarrow{a_8}$ est alors représenté par un segment fléché de longueur :

$$\frac{1{,}7.10^{-2}}{0{,}50.10^{-2}} = 3{,}4 \text{ cm.}$$





À RETENIR :

• Pour appliquer une des lois de Newton, il faut ;

- définir le système ;
- choisir un référentiel galiléen ;
- faire le bilan des forces extérieures appliquées à ce système et reporter ces forces (sans considération d'échelle) sur un schéma ;
- énoncer et exprimer la loi de Newton ;
- choisir, dans le but de projeter les différents vecteurs, le repère d'espace le mieux adapté ;
- projeter la relation vectorielle sur les axes et en déduire la valeur de l'accélération.

L'intégration de l'accélération permet d'obtenir l'expression de la vitesse en fonction du temps, celle de la vitesse permet d'obtenir l'équation horaire du mouvement.

• Pour un mouvement rectiligne :

si a = cte, comme $a = \frac{dv}{dt}$ alors $v = at + cte$

or, à t = 0, on a $v = v_0$ donc $\mathbf{v = at + v_0}$

Comme $v = \frac{dx}{dt}$ alors $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + cte$

or, à t = 0, on a $x = x_0$ donc $\mathbf{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0}$.

• Les deux premières lois de Newton concernent le centre d'inertie du solide.
Si le solide est animé d'un mouvement de translation, alors chacun de ses points possède, au même instant, le même vecteur vitesse et le même vecteur accélération que le centre d'inertie. On peut alors parler de la vitesse et de l'accélération du mobile.