Résumé

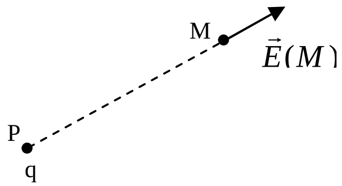
Électromagnétisme - Révisions

Champ électrostatique

Champ créé par une charge ponctuelle

Le champ créé au point M par une charge ponctuelle q placée en P est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q(P)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_{PM} = \frac{q(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$



E s'exprime en $V.m^{-1}$. $[E] = \frac{1}{[\varepsilon_0]}\frac{[q]}{[L]^2}$

(Schéma avec q >0)

ε_0 est la permittivité du vide. $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\ 10^9\ F^{-1}m$.

Champ créé par une distribution

Principe de superposition : le champ créé par une distribution de charges est la somme des champs créés par chaque charge supposée seule dans l'espace.

Distribution discrète de N charges ponctuelles : $\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i(M) = \sum_{i=1}^{N}\frac{q(P_i)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3}$.

Distribution continue : $\vec{E}(M) = \int_{P\in D}\frac{dq(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

Distribution linéique : $dq = \lambda d\ell$ $\quad \vec{E}(M) = \int_{P\in courbe}\frac{\lambda(P)d\ell(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

Distribution surfacique : $dq = \sigma dS$ $\quad \vec{E}(M) = \iint_{P\in surface}\frac{\sigma(P)dS(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

Distribution volumique : $dq = \rho d\tau$ $\quad \vec{E}(M) = \iiint_{P\in volume}\frac{\rho(P)d\tau(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

Attention : quelle que soit l'expression utilisée, vérifier soigneusement les dimensions à l'aide la relation $[E] = \frac{1}{[\varepsilon_0]}\frac{[q]}{[L]^2}$.

Remarque :

Le calcul du champ à l'aide de ces expressions peut être assez difficile, ne les utiliser qu'après avoir vérifié qu'aucune autre méthode n'est applicable (cf. ci-dessous).

Théorème de Gauss

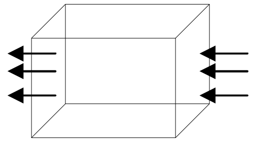
Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface fermée quelconque S est égal à la charge contenue dans la surface S divisée par ε_0 :

$$\Phi = \oiint_{M\in S}\vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \frac{Q_{\text{intérieure à S}}}{\varepsilon_0} = \frac{\iiint_{Volume}\rho d\tau}{\varepsilon_0}$$

Comprendre

- Le théorème de Gauss n'est applicable qu'aux **distributions hautement symétriques**. En particulier, le calcul du flux ne peut être simplifié que si les lignes de champ sont connues (étude des symétries et invariances).
- La surface de Gauss S étant quelconque, elle est **construite** de façon à ce que le champ soit **parallèle** ou **orthogonal** à cette surface (le produit scalaire est alors nul ou égal à EdS).

Remarque : $\Phi = 0 \not\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ exemple :



Énergie potentielle d'une charge dans un champ

L'énergie potentielle d'une charge ponctuelle q placée au point M où existe un potentiel V(M) : $E_P = qV(M)$.

Relations champ / potentiel

Forme locale : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Leftrightarrow dV = -\vec{E}.d\vec{\ell}$

Forme intégrale : $\Delta V = V_B - V_A = \int_A^B -\vec{E}.d\vec{\ell}$

(différence de potentiel entre les points A et B)

Surface équipotentielle: lieu des points M de l'espace tels que V(M) = cte.

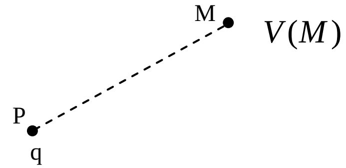
Propriétés du champ et du potentiel :

- Le champ est dirigé vers les potentiels décroissants (signe "-" de la formule $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$).
- Les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.

Potentiel créé par une charge ponctuelle

Le potentiel créé au point M par une charge ponctuelle q placée en P est :

$$V(M) = \frac{q(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{PM} + \text{cte}$$



V s'exprime en V. $[V] = \frac{1}{[\varepsilon_0]}\frac{[q]}{[L]}$

(Schéma avec q >0)

Résumé (charges ponctuelles)

$\vec{F}(M) = \dfrac{q(P)q(M)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_{PM}$	dérive de l'énergie potentielle $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_P$	$E_P(M) = \dfrac{q(P)q(M)}{4\pi\varepsilon_0 r}$ + cte
$\updownarrow$ $\vec{F} = q\vec{E}$		$\updownarrow$ $E_P = qV$
$\vec{E}(M) = \dfrac{q(P)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_{PM}$	Relation champ / potentiel $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$	Potentiel électrostatique $V(M) = \dfrac{q(P)}{4\pi\varepsilon_0 r}$ + cte

Potentiel créé par une distribution

Principe de superposition : le potentiel créé par une distribution de charges est la somme des potentiels créés par chaque charge supposée seule dans l'espace.

Pour une **distribution localisée ou d'extension finie** (pas de charges à l'infini), la constante qui apparaît dans l'expression du potentiel peut être prise nulle ($V(\infty) \to 0$), on obtient alors les expressions suivantes.

Distribution discrète d'extension finie, de N charges ponctuelles :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q(P_i)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{P_iM}.$$

Distribution continue d'extension finie : $V(M) = \displaystyle\int_{P\in D} \frac{dq(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{PM}$

Distribution linéique : dq = λdℓ $\quad V(M) = \displaystyle\int_{P\in courbe} \frac{\lambda(P)d\ell(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{PM}$

Distribution surfacique : dq = σdS $\quad V(M) = \displaystyle\iint_{P\in surface} \frac{\sigma(P)dS(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{PM}$

Distribution volumique : dq = ρdτ $\quad V(M) = \displaystyle\iiint_{P\in volume} \frac{\rho(P)d\tau(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{PM}$

Attention : quelle que soit l'expression utilisée, vérifier soigneusement les dimensions à l'aide la relation $[V] = \dfrac{1}{[\varepsilon_0]}\dfrac{[q]}{[L]}$.

Si la distribution n'est pas localisée (extension infinie), on calcule le champ et on en déduit le potentiel à l'aide de la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ en fixant arbitrairement la valeur du potentiel en un point de l'espace à distance finie : on pose $V(M_0) = V_0$.

Circulation du champ électrostatique

Le champ $\vec{E}$ est à **circulation conservative**. La circulation de $\vec{E}$ le long d'une courbe fermée (Γ) est nulle : $\int_A^A \vec{E}.d\vec{\ell} = V_A - V_A = 0$.

Propriétés de continuité du champ et du potentiel

	Distribution		
	volumique	surfacique	linéique
Potentiel	continu	continu	discontinu
Champ	continu	discontinu	discontinu

Calcul de champ électrostatique : méthodes

Calcul de $\vec{E}$
- Théorème de Gauss
- Calcul direct de V
- Calcul direct de $\vec{E}$

Loi de Coulomb (1785)

$$\vec{F}_{P\to M} = \frac{q(P)q(M)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_{PM}$$

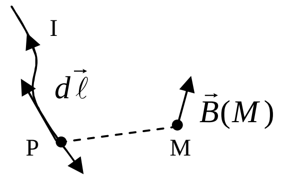
Attractive si $q_Pq_M < 0$ (charges de signes contraires), répulsive si $q_Pq_M < 0$ (charges de mêmes signes).

Champ magnétostatique

Champ créé par un courant filiforme : loi de Biot et Savart (1820)

Le champ créé au point M par un courant filiforme I est :

$$\vec{B}(M) = \int_{P\in fil} \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$



B s'exprime en T (Tesla). $[B] = [\mu_0]\dfrac{[I]}{[L]}$

μ_0 est la perméabilité du vide. $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ usi.

$d\vec{\ell}$ est orienté dans le sens de I

Champ créé par une distribution

Le terme I $d\vec{\ell}$ (en Am) est remplacé par $\vec{j}_S dS$ (Am) ou par $\vec{j} d\tau$ (Am) :

Distribution surfacique : $\vec{B}(M) = \iint_{P\in surface} \dfrac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}_S(P) dS(P) \wedge \dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

Distribution volumique : $\vec{B}(M) = \iiint_{P\in volume} \dfrac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(P) d\tau(P) \wedge \dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

Attention : quelle que soit l'expression utilisée, vérifier soigneusement les dimensions à l'aide la relation $[B] = [\mu_0]\dfrac{[I]}{[L]}$.

Remarque :

Le calcul du champ à l'aide de ces expressions peut être assez difficile, ne les utiliser qu'après avoir vérifié qu'aucune autre méthode n'est applicable (cf. ci-dessous).

Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétostatique $\vec{B}$ le long d'une courbe fermée quelconque (Γ) est égale à la somme algébrique des courants enlacés par (Γ) multipliée par μ_0 :

$$C = \oint_{M\in\Gamma} \vec{B}(M).d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacés par }\Gamma} = \mu_0 \iint_{surface} \vec{j}.d\vec{S}$$

Convention d'orientation

- un sens + est choisi arbitrairement sur Γ ;
- la circulation (bornes d'intégration) est calculée dans le sens + ;
- le sens + permet de définir un vecteur $\vec{n}$ en tout point d'une surface posée sur Γ : I est compté positivement s'il perce cette surface dans le sens de $\vec{n}$, négativement dans le cas contraire.

Comprendre

- Le théorème d'Ampère n'est applicable qu'aux **distributions hautement symétriques**. En particulier, le calcul de la circulation ne peut être simplifié que si les lignes de champ sont connues (étude des symétries et invariances).
- La courbe d'Ampère (Γ) étant quelconque, elle est **construite** de façon à ce que le champ soit **parallèle** ou **orthogonal** à cette courbe (le produit scalaire est alors nul ou égal à Bdℓ).
- Le pêcheur Gauss compte les poissons-charges dans son épuisette-surface de Gauss tandis que le faucheur Ampère compte les épis-courants entourés, liés par sa ficelle-contour d'Ampère…

Propriétés de continuité du champ

	Distribution		
	volumique	surfacique	linéique
Champ	continu	discontinu	discontinu

Calcul de champ magnétostatique : méthodes

Calcul de $\vec{B}$
- Théorème d'Ampère
- Calcul direct de $\vec{B}$

Propriétés **des champs** $\vec{E}$ **et** $\vec{B}$

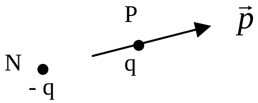
	$\vec{E}$	$\vec{B}$
Sources	Charges	Courants
Symétries / antisymétries	M ∈ plan de ***symétrie*** Π pour les ***charges*** ⇒ $\vec{E}(M) \in \Pi$ M ∈ plan ***d'antisymétrie*** Π^* pour les ***charges*** ⇒ $\vec{E}(M) \perp \Pi^*$	M ∈ plan ***d'antisymétrie*** Π^* pour les ***courants*** ⇒ $\vec{B}(M) \in \Pi^*$ M ∈ plan de ***symétrie*** Π pour les ***courants*** ⇒ $\vec{B}(M) \perp \Pi$
Expressions	$\vec{E}(M) = \int_{P\in D} \frac{dq(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$ dq = λdℓ ou σdS ou ρdτ	$\vec{B}(M) = \int_{P\in fil} \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{K}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$ $d\vec{K} = Id\vec{\ell}$ ou $\vec{j}_S dS$ ou $\vec{j} d\tau$
Flux (surface fermée)	***Théorème de Gauss*** $\Phi = \oiint_{M\in S} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \frac{Q_{\text{intérieure à S}}}{\varepsilon_0}$	***Flux conservatif*** $\oiint_{M\in S} \vec{B}(M).d\vec{S}(M) = 0$
Circulation (contour fermé)	***Circulation conservative*** $\int_A^A \vec{E}.d\vec{\ell} = V_A - V_A = 0$	***Théorème d'Ampère*** $C = \oint_{M\in\Gamma} \vec{B}(M).d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacés par }\Gamma}$

Dipôles

Dipôle électrostatique

Soit une distribution de N charges q_i de charge totale nulle $\sum_{i=1}^{N} q_i = 0$ mais telle que le barycentre N des charges négatives et le barycentre P des charges positives soient distincts.
On note q, la somme des charges positives.
Le moment dipolaire électrique de la distribution est défini par :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP} \quad \text{en Cm.}$$



Unité adaptée à la chimie : Debye $\quad 1\ D = \frac{1}{3}10^{-29}\ Cm$

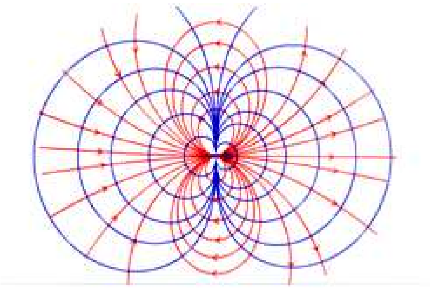
Comprendre

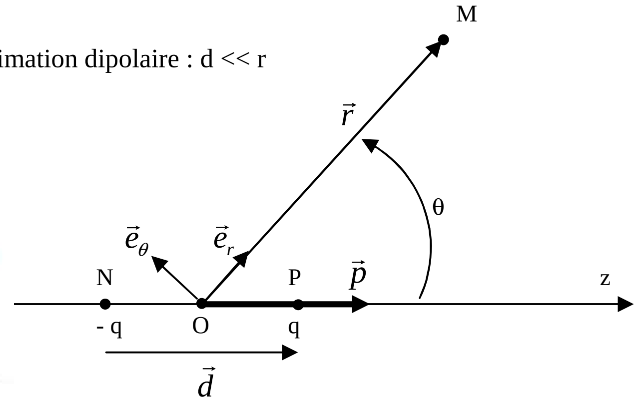
Le moment dipolaire caractérise la distribution or la celle-ci possède une caractéristique électrique (la somme des charges positives q) et une caractéristique géométrique (son extension spatiale, la distance NP), la définition synthétise donc ces informations, sous forme vectorielle, pour indiquer en plus la position des charges dans l'espace.

Potentiel et champ créés par un dipôle électrostatique

On se place dans l'***approximation dipolaire*** (on étudie le dipôle à une distance r grande devant ses dimensions propres d).

Approximation dipolaire : d << r



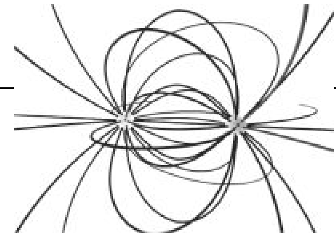


On montre que le potentiel créé en M (à l'ordre 1 en $\frac{d}{r}$) est :

$$V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{ou encore} \quad V(M) = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad \text{(expression intrinsèque).}$$

On en déduit le champ créé :

$$\vec{E}\left|\begin{array}{l} \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ 0 \end{array}\right. \quad \text{ou encore} \quad \vec{E} = \frac{(3\vec{p}.\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \quad \text{(expression intrinsèque).}$$



Actions subies par un dipôle électrostatique placé dans un champ extérieur

Les actions subies par un dipôle quelconque (rigide ou non) placé dans un champ électrostatique extérieur $\vec{E}$ sont caractérisées par :

- la résultante des forces appliquées au dipôle $\vec{R}_e$ telle que :
  - $\vec{R}_e = \vec{0}$ si le champ extérieur $\vec{E}$ est uniforme ;
  - $\vec{R}_e \neq \vec{0}$ entraîne le dipôle vers les régions où le champ est le plus intense lorsque le champ $\vec{E}$ n'est pas uniforme.
- le moment résultant $\vec{m}_O$ tel que : $\vec{m}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}$ tendant à aligner le moment dipolaire $\vec{p}$ avec le champ $\vec{E}$ (équilibre stable lorsque les vecteurs sont de même sens, instable lorsqu'ils sont de sens contraires).

Pour tous les exercices sur le sujet, faire un schéma, représenter les champs en N et P puis les forces en ces points.

Énergie potentielle d'un dipôle RIGIDE placé dans un champ extérieur

Un dipôle rigide placé dans un champ extérieur quelconque $\vec{E}$, possède une énergie potentielle E_P telle que : $E_P = -\vec{p}.\vec{E}$.

On remarque que cette énergie est minimum lorsque $\vec{p}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires et de même sens (équilibre stable).

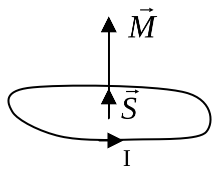
Dipôle magnétostatique

Soit une boucle de courant parcourue par un courant d'intensité I.
Le moment dipolaire magnétique de la distribution est défini par :

$$\vec{M} = I\vec{S} \quad \text{en Am.}$$

Où $\vec{S}$ est le vecteur surface associé à la boucle.

$\vec{S} = \iint_{P \in surface} d\vec{S}(P)$ est unique et caractéristique du contour formant la boucle.

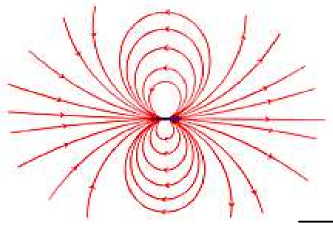


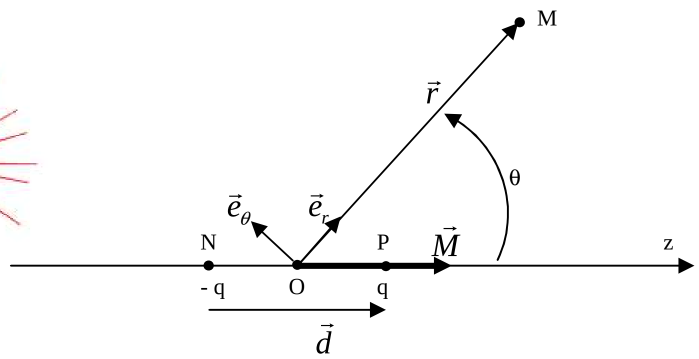
Comprendre

Le moment dipolaire caractérise la distribution or la celle-ci possède une caractéristique électromagnétique (le courant d'intensité I) et une caractéristique géométrique (son extension spatiale, la surface S de la boucle), la définition synthétise donc ces informations, sous forme vectorielle.

Champ créé par un dipôle magnétostatique

On se place dans l'***approximation dipolaire*** (on étudie le dipôle à une distance grande devant ses dimensions propres) : d << r.





Champ créé :

$$\vec{B} \left| \begin{array}{l} \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2M\cos\theta}{r^3} \\ \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{M\sin\theta}{r^2} \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{ou encore} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(3\vec{M}.\vec{r})\vec{r} - \vec{M}r^2}{r^5} \quad \text{(expression intrinsèque).}$$

Actions subies par un dipôle magnétostatique placé dans un champ extérieur

Les actions subies par un dipôle quelconque (rigide ou non) placé dans un champ magnétostatique extérieur $\vec{B}$ sont caractérisées par :

- la résultante des forces appliquées au dipôle $\vec{R}_e$ telle que :
  - ➢ $\vec{R}_e = \vec{0}$ si le champ extérieur $\vec{B}$ est uniforme ;
  - ➢ $\vec{R}_e \neq \vec{0}$ entraîne le dipôle vers les régions où le champ est le plus intense lorsque le champ $\vec{B}$ n'est pas uniforme.
- le moment résultant $\vec{m}_O$ tel que : $\vec{m}_O = \vec{M} \wedge \vec{B}$ tendant à aligner le moment dipolaire $\vec{M}$ avec le champ $\vec{B}$.

Énergie potentielle d'un dipôle RIGIDE placé dans un champ extérieur

Un dipôle rigide placé dans un champ extérieur quelconque $\vec{B}$, possède une énergie potentielle E_P telle que : $E_P = -\vec{M}.\vec{B}$.

Méthode d'étude d'un champ statique

1. Symétries ⇒ direction du champ.
2. Invariances ⇒ paramètres de position dont dépend le champ.
3. Choix de la méthode :
   - Théorèmes de Gauss / Ampère pour les situations hautement symétriques.
   - Calcul du potentiel dans le cas du champ électrostatique.
   - Calcul direct.
4. Schéma(s) de la distribution avec tracé des lignes de champ ⇒ choix de la surface de Gauss ou du contour d'Ampère.
5. Calcul du flux ou de la circulation.
6. Calcul de Q_{int} ou de $I_{enlacés}$: distinguer éventuellement plusieurs cas en fonction de la position de la surface de Gauss ou du contour d'Ampère par rapport à la distribution.
7. Conclure vectoriellement (distinguer éventuellement plusieurs cas, vérifier systématiquement les signes).

Ressources internet

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Elec/Champs/Index_Champs.html
http://www.falstad.com/vector3de/
http://www.falstad.com/vector3dm/
http://web.ncf.ca/ch865/frenchdescr/electricity.html