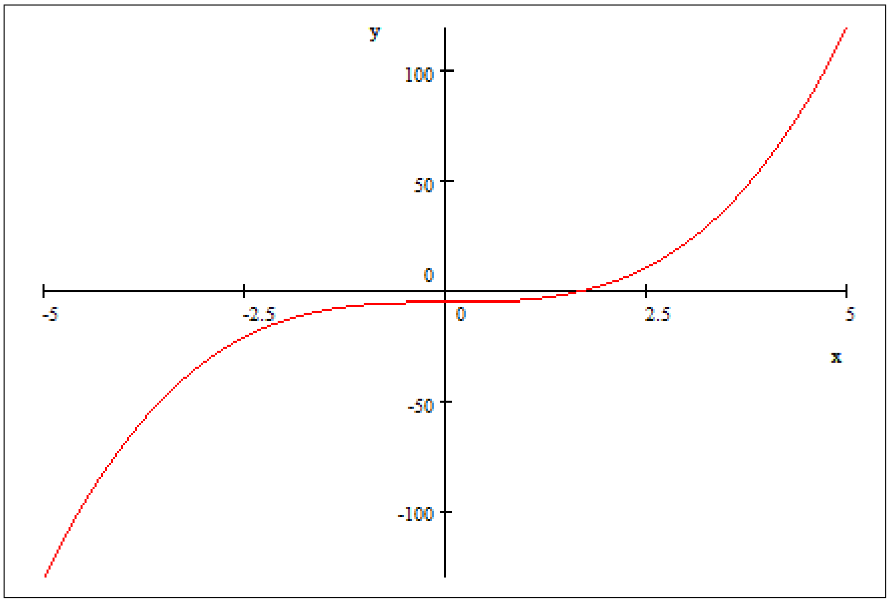
Correction de la Feuille d'exercices N°5
Applications Inverses et Relations d'équivalence
(*Janvier* 2013)

Exercise 1 i) *Graphe de la fonction $f(x)$.*



Graphiquement la fonction f est bijective. En effet,

- *pour montrer la surjectivité il suffit de voir que toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe le graphe de f. Ceci se traduit analytiquement par :*
- *pour montrer l'injectivité, il suffit de voir que l'intersection de chacune de ses parallèles avec le graphe de f est unique.*

Montrons maintenant analytiquement que f est bijective.

- *Surjectivité :*

  Soit $y \in \mathbb{R}$. *Soit* $x = (y+5)^{1/3}$. *Alors* $x \in \mathbb{R}$, *et* $f(x) = \left((y+5)^{1/3}\right)^3 - 5 = y$. *Ainsi* $y \in \operatorname{Im} f = f(\mathbb{R})$. *Et comme* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est bien définie,* $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R})$ *et f est donc surjective.*

- *Injectivité :*

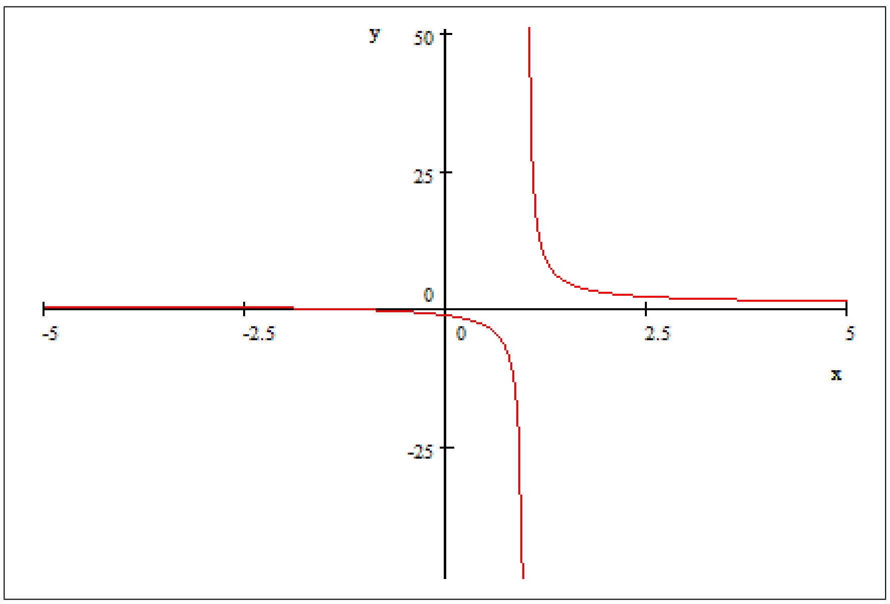
  Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x_1) = f(x_2)$, *alors* $x_1^3 - 5 = x_2^3 - 5$. *Par conséquent* $x_1 = x_2$ *et f est injective.*

Maintenant montrons que $f^{-1}(y) = (y+5)^{1/3}$. *Soit* $y \in \mathbb{R}$. *On a*

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) = x \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad x = (y+5)^{1/3} \end{aligned}$$

donc $f^{-1}(y) = (y+5)^{1/3}$.

ii) *Graphe de* f.



Montrons que f *est bijective.*

- f *est surjective. A voir que* $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}\backslash\{1\}) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
  Supposons que $y \in \operatorname{Im} f$. *Cela signifie que* $y = f(x)$, *pour un certain* $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$; *en d'autres termes,* $y = (x+1)/(x-1)$.
  Cherchons la forme de x.
  En multipliant y *par* $x-1$, *on obtient* $(x+1) = yx-y$. *Ce qui implique* $x - yx = -y - 1$. *Enfin* $x = (y+1)/(y-1)$. *Donc* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
- f *est surjective. Soit* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x_1) = f(x_2)$, *alors*

$$\frac{(x_1+1)}{(x_1-1)} = \frac{(x_2+1)}{(x_2-1)}.$$

  Ainsi,

$$x_1x_2 + x_2 - x_1 - 1 = x_2x_1 + x_1 - x_2 - 1.$$

  D'où $x_1 = x_2$ *et* f *est injective.*

Expression de f^{-1}.

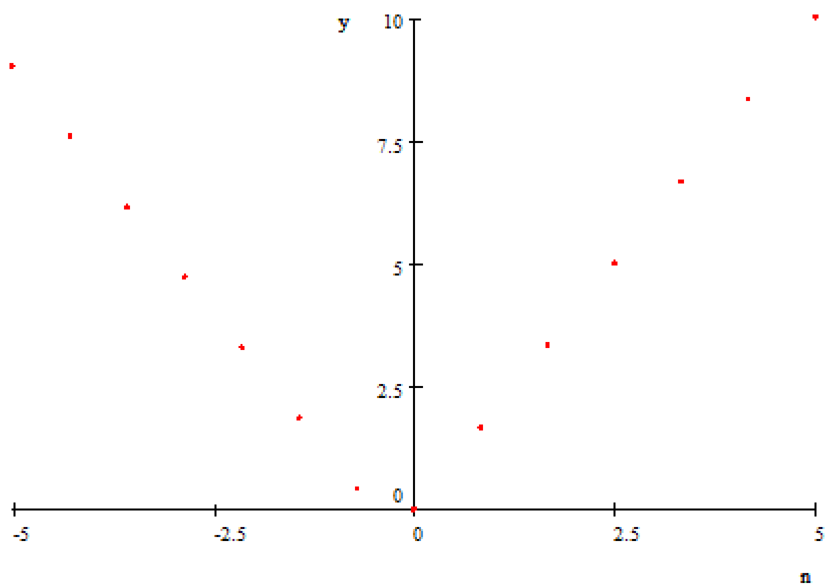
Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. *Alors il existe un unique* $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ *tel que* $f(x) = y$. *On a :*

$$\begin{aligned} f(x) = y\,(x+1)\,/\,(x-1) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{(x+1)}{(x-1)} = y \\ &\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{(y+1)}{(y-1)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f^{-1}(y) = x = \frac{(y+1)}{(y-1)}.$$

iii) *Graphe de* f.



Il est clair que f *est bijective.*

On montre facilement que l'inverse $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *est définie par :*

$$f^{-1}(k) = \begin{cases} \frac{k}{2} & si \quad k \text{ est pair} \\ \frac{-(k+1)}{2} & si \quad k \text{ est impair} \end{cases}.$$

Solution 2 1. $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence. En effet,*

Si $a \in A$, *alors* $f(a) = f(a)$ *et* $a\mathcal{R}a$. *Donc* $\mathcal{R}$ *est réflexive.*

Si $a, b \in A$ *avec* $a\mathcal{R}b$, *alors* $f(a) = f(b)$. *Par conséquent* $f(b) = f(a)$ *et* $b\mathcal{R}a$. *Donc* $\mathcal{R}$ *est symétrique.*

Si $a, b, c \in A$ *avec* $a\mathcal{R}b, b\mathcal{R}c$, *alors* $f(a) = f(b)$ *et* $f(b) = f(c)$. *Par conséquent* $f(a) = f(c)$ *et* $a\mathcal{R}c$. *Donc* $\mathcal{R}$ *est transitive.*

2. *Si* $\mathcal{R}$ *est injective, alors* $a\mathcal{R}b$ *si, et seulement si,* $f(a) = f(b)$. *Ceci, à son tour, se produit si et seulement si* $a = b$.

   Par conséquent, la classe d'équivalence de a *est* $\{a\}$.