PSI du Lycée Bab Sahara
Année scolaire 2012/2013.

DL

Exercice 1.

Partie A. : Dans cette partie, on établit quelques résultats préliminaires qui pourront être utilisés dans les deux parties suivantes.

1. Pour $n \geq 1$, on pose : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$. Etudier la nature de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$. en déduire que la suite $(u_n)_n$ converge. On note γ sa limite.
2. Pour x élément de $]0, +\infty[$, on considère l'application h_x de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$h_x(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$$
   a. Déterminer le tableau de variation de h_x.
   b. Justifier les inégalités : $\forall n \geq 3$, $\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt \leq \frac{\ln(n)}{n}$ et $\forall n \geq 4$, $\frac{\ln(n)}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}\,dt$.
   c. Prouver que la série $\sum(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

$$\text{On pose : } S = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$$

Les deux parties qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie B. On se propose dans cette partie de calculer S.
Pour $n \geq 3$, on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{\ln(k)}{k},\ t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k},\ a_n = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}$$

1. Utiliser les inégalités établies en question $2.b$ de la partie A pour démontrer que :
   a. la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante
   b. La suite $(a_n)_n$ converge.
2. Montrer que $\forall n \geq 3$, $S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)\ln(2)$. en déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n, a_{2n} et u_n.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}$ (on exprimera cette limite en fonction de γ et de $\ln(2)$). déterminer S.

Partie C.

On note F l'application de $]1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour $n \geq 1$, on considère l'application ϕ_n de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\phi_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
Dans cette partie on étudie d'abord le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures, ensuite la série de fonction $\sum \phi_n$, puis on retrouve la valeur de S.

1. Pour $n \geq 1$, on considère les applications v_n et w_n de $[1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\, dt$$

a. i. Calculer $v_n'(x)$.

ii. Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ est normalement convergente sur $[1, +\infty[$.

b. i. Prouver que pour $n \geq 1$, w_n est continue sur $[1, +\infty[$.

ii. Montrer que $\forall x \geq 1,\ \forall n \geq 1,\ 0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$.

iii. On considère la fonction W définie par $W = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$.

Démontrer que W est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

c. i. Montrer que $\forall x > 1,\ W(x) = F(x) + \dfrac{1}{1-x}$.

ii. Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(F(x) + \dfrac{1}{1-x} \right)$ (on exprimera le résultat en fonction de γ).

2. a. Montrer que la série de fonctions $\sum \phi_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

b. Soit a un élément de $]0, +\infty[$. Démontrer que la série de fonctions $\sum \phi_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

c. On considère la fonction ϕ définie par $\phi = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \phi_n$. Montrer que ϕ est définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Exprimer $\phi'(1)$ sous forme de somme d'une série.

3. a. Etablir que : $\forall x > 1,\ \phi(x) = (1 - 2^{1-x})F(x)$.

b. Déterminer un développement limité de $1 - 2^{1-x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1, puis un développement limité de $\phi(x)$ à l'ordre 1 au voisinage de 1. En déduire la valeur de S

Exercice 2

Dans tout le problème, a et b désignent deux réels positifs tels que : $0 < a < b$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction u_n de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x > 0\ ,\ u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Préliminaire.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ qui à $x \in \mathbf{R}$ associe $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

1.1. Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N}^*\ ,\ \forall x > 0\ ,\ u_n(x) \geqslant 0$.

1.2. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite du problème, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est notée S et γ désigne la valeur de $S(1)$.

2. Prouver que S est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x > 0\ ,\ \dfrac{dS}{dx}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} \right)$.

3. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que lorsque p tend vers l'infini : $\sum\limits_{n=1}^{p} \dfrac{1}{n} = \ln p + \gamma + o(1)$.

4.1. Prouver que :

$$\sum_{n=1}^{p} \big(u_n(x+1) - u_n(x)\big) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + \ln(1+x) - \ln(p+1+x).$$

4.2. En déduire que :

$$\forall x > 0 \ , \ S(x+1) = S(x) + \gamma + \ln(1+x).$$

Soit φ la fonction définie de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x > 0 \ , \ \varphi(x) = \frac{1}{x} \exp\big(-\gamma x + S(x)\big)\,.$$

5.1. Montrer que $\forall x > 0 \ , \ \varphi(x+1) = x\,\varphi(x)$.

5.2. Vérifier que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Calculer $\dfrac{d\varphi}{dx}(x)$ pour $x > 0$. Que vaut $\dfrac{d\varphi}{dx}(1)$?

6. Pour $n \geqslant 1$, soit φ_n la fonction de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x > 0 \ , \ \varphi_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Montrer que $\forall x > 0 \ , \ \ln\big(\varphi_n(x)\big)$ tend vers $S(x) - x\gamma - \ln x$ quand n tend vers $+\infty$.

On note $\pi_p = \displaystyle\prod_{n=1}^{p} \frac{\exp\left(\frac{x}{n}\right)}{1 + \frac{x}{n}}$ (p entier naturel > 0).

7.1. Prouver la convergence de la suite $(\pi_p)_{p \geqslant 1}$ vers une limite $L(x)$.

7.2. En déduire que : $\forall x > 0 \ , \ \varphi(x) = \dfrac{L(x)}{x} \exp(-x\gamma)$.