Le produit scalaire

I. Différentes expressions du produit scalaire :

1. Vecteurs colinéaires :
Définition :

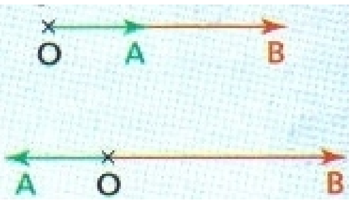
soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls, tels que
$\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens : $\vec{u}.\vec{v}=OA\times OB$.

• Si $\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraires : $\vec{u}.\vec{v}=OA\times OB$.

• Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=0$.

• $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|$ est le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$



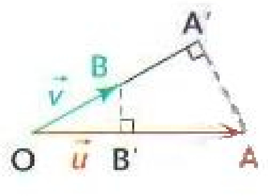
2. Vecteurs quelconques : Propriété 1 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que
$\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

Alors :

$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=OA'\times OB=OA\times OB'}$.

A' et B' sont respectivement les projetés orthogonaux de A sur (OB) et de B sur (OA).



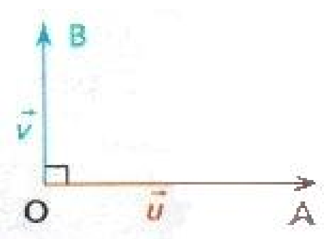
3. Propriétés : Propriété 2 :

Soient (x;y) et (x';y') les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un **repere orthonormé** quelconque.

$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = x.x'y.y'}$.

II. Produit scalaire et orthogonalité : Définition :

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux signifie que :
- Soit $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$;
- Soit (OA)$\perp$(OB), avec $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ non nuls.



2. Propriété : Propriété :

$\boxed{\vec{u}\perp\vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0}$.

III. Propriétés du produit scalaire : Propriétés : Propriétés :

Soient ,$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel.

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ (symétrie).
- $(k\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$ (linéarité)
- $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$ (linéarité)
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ (linéarité)
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ (identite remarquable)
-

$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ (identite remarquable)

• $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ (identite remarquable)

IV. Applications du produit scalaire : 1. produit scalaire et cosinus : Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

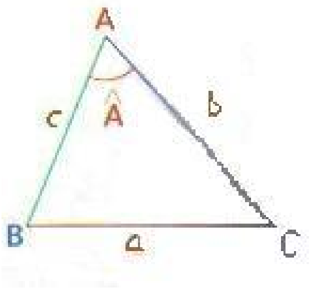
2. Théorème d'Al-Kashi : Théorème :

Soit ABC un triangle tel que AB=c, AC=b et BC=a.
On a :

• $a^2 = b^2+c^2-2bc\times cos A$

• $b^2 = a^2+c^2-2ac\times cos B$

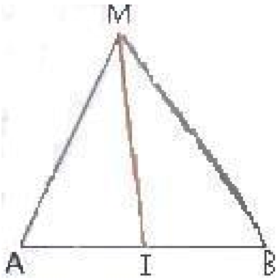
• $c^2 = a^2+b^2-2ab\times cos C$



3. Théorème de la médiane : Théorème :

Soient A et B deux points distincts et I le milieu du segment [AB] .
Pour tout point M, :

$$\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}}$$


M
A
I
B