Fonction rationnelle.

Exercice : Etude d'une fonction irrationnelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle des asymptotes horizontales ?
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

.

Correction de l'exercice :

Etude d'une fonction irrationnelle:

Exercice : Etude d'une fonction irrationnelle

Remarque : $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, la fonction f est effectivement bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. <u>Limite en $-\infty$</u>

   On a : $$\lim_{x \to -\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty \text{ et } \lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

   D'où, par composition : $$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$$

   Finalement : $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

   La courbe C_f n'admet pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

   <u>Limite en $+\infty$</u>

   Pour lever l'indétermination (du type "$\infty - \infty$"), on utilise la transformation d'écriture suivante :

.

$$\sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

Dans le dernier quotient, on a encore une indétermination du type "∞/∞". On écrit, pour $x>0$:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

On en déduit facilement : $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$$

La courbe C_f admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=\frac{1}{2}$.

2. On étudie la différence : $$f(x)-y=\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, on a une indétermination du type "$\infty-\infty$". On procède comme précédemment :

$$\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}+\frac{1}{2}$$

Et pour $x<0$, on obtient (attention $\sqrt{x^2}=-x$ dans ce cas) :

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}+\frac{1}{2}=-\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}+\frac{1}{2}$$

D'où : $$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0$$

La droite Δ d'équation $y=-2x-\frac{1}{2}$ est bien asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

.