Fontions, dérivée et tangente.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

On note C_f sa représentation graphique .

1. Calculer la dérivée f' de f , puis résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

2. En déduire les coordonnées de s deux points A et B en lesquels C_f

   admer une tangente horizontale .

3. Déterminer les coordonnées des trois points P,Q et R d'intersection

   entre C_f et l'axe des abscisses.(On notera P celui qui a une abscisse strictement positive)

4. En déduire une équation de la tangente T à C_f en P.

Correction de l'exercice :

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x$$

On note C_f sa représentation graphique.

1. On a : $$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

   Résolvons l'équation $f'(x) = 0$. En factorisant :

   $$3(x-1)(x+1) = 0$$

   $$x = 1 \text{ ou } x = -1$$

   $$S = \{-1\ ;\ 1\}$$

   La dérivée s'annule donc lorsque $x = -1$ et lorsque $x = 1$.

2. Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse x est $f'(x)$. La tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire lorsque $f'(x) = 0$. D'après la question 1, cela se produit aux abscisses $x = -1$ puis $x = 1$.

   Les abscisses de A et B sont donc -1 et 1. Calculons leurs ordonnées respectives :

   $$f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) = -1 + 3 = 2$$

   $$f(1) = 1^3 - 3 = -2$$

   Donc : $$A(-1\ ;\ 2) \text{ et } B(1\ ;\ -2)$$

3. C_f et l'axe des abscisses se coupent aux abscisses tels que :

   $$f(x) = 0$$

   $$x^3 - 3x = 0$$

   $$x(x^2 - 3) = 0$$

   $$x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

   $$x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

   Les trois points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses sont :

   $$P(\sqrt{3}\ ;\ 0)\ ;\ Q(0\ ;\ 0) \text{ et } R(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$$

4. Une équation de la tangente T à C_f en P est : $y = ax + b$ avec $a = f'(\sqrt{3}) = 3 \times (3 - 1) = 6$.

   Donc : $$T : y = 6x + b$$

   Par ailleurs, la droite T passe le point P donc : $y_P = 6x_P + b$

   $$0 = 6 \times \sqrt{3} + b$$

   $$b = -6\sqrt{3}$$

   Conclusion : une équation de la tangente T à C_f en P est :

   $$y = 6x - 6\sqrt{3}$$

