

Les nombres de Fibonacci

Léonard de Pise (1180-1250), un mathématicien italien, surnommé Fibonacci, se posa le problème suivant :

"Un homme achète un couple de lapins. Sachant qu'à partir de l'âge de 2 mois , un couple de lapins se reproduit tous les mois en donnant naissance à un couple de lapins, combien y aura-t-il de lapins au bout de 12 mois ?"

Dans le tableau suivant, un r représente un couple de lapins.

Les r après le signe + sont les couples nés dans le mois.

Les r avant le signe + sont les couples qui existaient déjà le mois précédent.

1°) Compléter la tableau en expliquant comment remplir la ligne du 6^{ème} mois.

On note F_n le nombre de couples de lapins existant au mois numéro n .

| Au bout de ... | Couples de lapins existants | | Total |
|----------------|-----------------------------|---|---------|
| 0 mois | r | Le 1 ^{er} couple de lapins | $F_0 =$ |
| 1 mois | r | Le 1 ^{er} couple de lapins n'a pas encore 2 mois et ne se reproduit pas. | $F_1 =$ |
| 2 mois | r + r | Le 1 ^{er} couple de se reproduit. | $F_2 =$ |
| 3 mois | rr + r | Le 1 ^{er} couple de se reproduit. | $F_3 =$ |
| 4 mois | rrr + rr | Le couple de lapins nés au 2 ^{ème} mois ne se reproduit pas. | $F_4 =$ |
| 5 mois | rrrr + rrr | Tous les couples de lapins existants au 2 ^{ème} mois se reproduisent. | $F_5 =$ |
| | | Tous les couples de lapins existants au 3 ^{ème} mois se reproduisent. | |

6 mois
7 mois

2°) Expliquer comment trouver facilement F_8 .

3°) Compléter le tableau suivant : (expliquer comment le remplir)

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| Nombr 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| e n de mois | | | | | | | | | | | | |
| Nombr e F_n de couple s de lapins | | | | | | | | | | | | |

Les nombres F_n sont appelés les nombres de Fibonacci.

4°) Répondre au problème de Fibonacci :

"combien y aura-t-il de couples de lapins au bout de 12 mois ?"

5°) Calculer F_{38} , le nombre couples de lapins existant au bout de 38 mois ...

