Université Paris 7 Denis Diderot — Année 2011-2012
L1 - 51 PH1ME2 - Section A

TD3
Énergie

---

1 Travaux forcés

1.1 Énergie potentielle

1. **Cube et culbute**

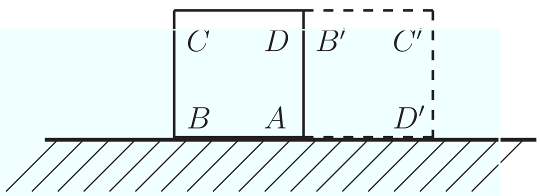

Figure 1: Culbute du cube ABCD.

On veut faire basculer un cube de masse M de côté $AB = a$ de la position $ABCD$ à la position $AB'C'D'$ par rotation autour de l'arête horizontale passant par A et perpendiculaire à AB (cf. figure 1).

(a) Quelle est la variation d'énergie potentielle entre les positions initiale et finale ?

(b) Quelle est l'énergie potentielle E_p dans une position intermédiaire quelconque entre les états initial et final ?

(c) Quelle énergie a-t-on mis en jeu lors de cette rotation ?

2. **aspects qualitatifs**

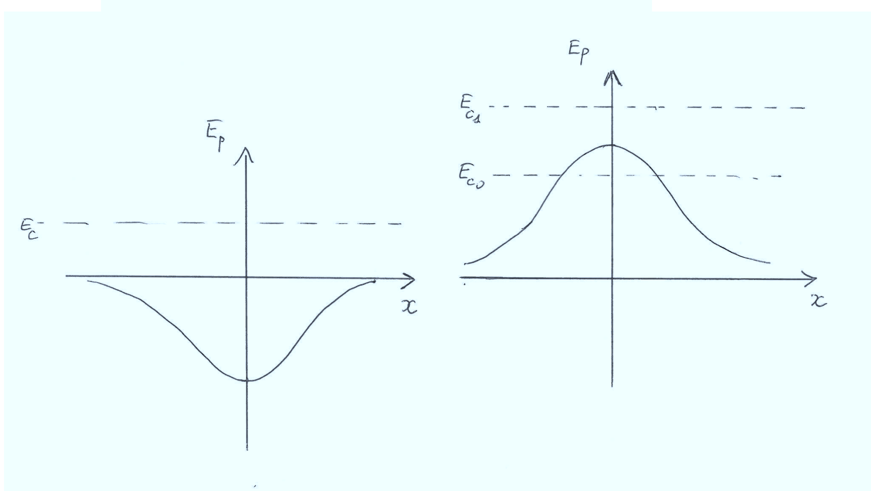

Figure 2: a) à gauche : "Puits" de potentiel ; b) à droite : "Barrière de potentiel

(a) Une particule se déplace sur un axe rectiligne de la gauche vers la droite et la figure 2 représente son énergie potentielle en fonction de sa position : on parlera pour la partie gauche (a) de puits de potentiel et pour la partie droite (b) de barrière de potentiel (pourquoi ?). Décrire le mouvement de la particule en fonction de la valeur de son énergie cinétique initiale (i.e., quand il se trouve à $-\infty$ où son énergie potentielle est nulle.) Dans le cas de la figure de gauche (a), que se passe-t-il si l'énergie mécanique de la particule est négative ?

(b) L'énergie potentielle $E_p(r)$ d'un objet ponctuel M en fonction de sa position est représentée ci-dessous par son graphe, r étant la distance de M à un point O pris comme origine. En ne s'intéressant qu'à la partie radiale du mouvement de M on se ramène à un mouvement à une seule dimension.

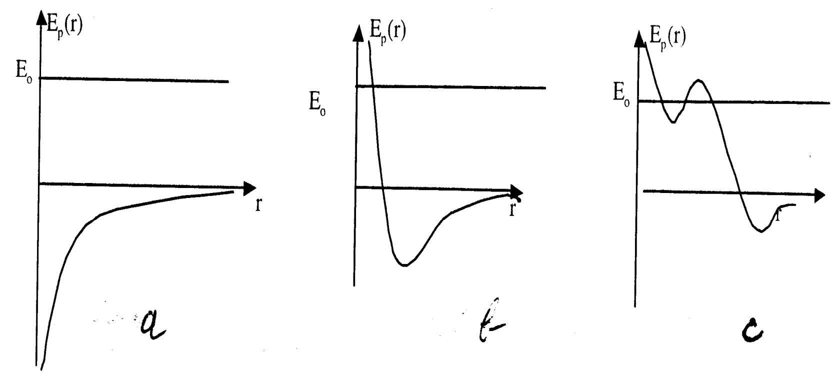

Figure 3: Énergies potentielles associées à différents champs de force

i. Pour chacun des cas représentés sur la figure 3, dessiner le graphe de la fonction scalaire $F(r)$ telle que $\vec{F}(r) = F(r)\,\hat{e}_r$, où $\vec{F}(r)$ est la force qui dérive de $E_p(r)$ et $\hat{e}_r$ désigne le vecteur unitaire dans la direction radiale. Discuter l'existence, la position et la stabilité des éventuels points d'équilibre.

ii. Pour un objet ponctuel, d'énergie mécanique E_M comprise entre 0 et E_0, préciser les régions accessibles de l'espace et décrire, à l'aide des résultats de la question précédente son mouvement pour diverses conditions initiales.

iii. Dessiner le graphe représentant l'énergie cinétique $E_c(r)$ de cet objet.

(c) **aspects quantitatifs**

- **schématique** Une particule ponctuelle est fixée en un point O et une deuxième particule tout aussi ponctuelle, est astreinte à se déplacer sur un axe rectiligne passant par O. L'énergie potentielle de ce système est représentée sur la figure 4.

  i. La particule en mouvement, qui a une masse de 0.5 MeV, a initialement, à l'infini, une énergie cinétique égale à 1 eV. Quelle est alors sa vitesse ? Décrire ensuite son mouvement.

  ii. Quelle énergie cinétique minimale faut-il lui fournir pour qu'elle parvienne au contact de la particule fixe en O ? Tracer alors la courbe représentant les variations de l'énergie cinétique.

  iii. Quelle est la nature de la force entre les deux particules. Tracer le graphe de sa valeur algébrique.

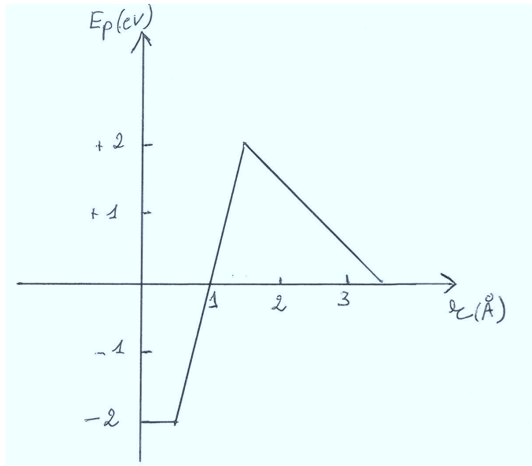

Figure 4: Énergie potentielle (schématisée) d'interaction entre deux particules dont l'une est fixe à l'origine

iv. On suppose que la particule en mouvement a pu s'approcher de la particule fixe à moins de 1 Åde la particule fixe avec l'énergie minimale nécessaire. Elle perd brutalement 1.5 eV. Que se passe-t- il ? Décrire le mouvement ultérieur.

- **plus réaliste** On a pu montrer, en première approximation, que l'énergie potentielle d'interaction entre deux atomes d'argon est représentée par l'expression

$$U(r) = -U_0 \left\{ 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} \right\},$$

avec $r_0 = 3.65\ 10^{-10}$ m et $U_0 = 0.01$ eV.

i. Tracer l'allure de la courbe représentant l'énergie potentielle $U(r)$ et déterminer la valeur r_{min} de r où cette énergie est minimale. Que vaut alors $U(r_{min})$?

ii. Donner l'expression de la force responsable de cette interaction et donner l'ordre de grandeur de son intensité pour $r = r_0/2$.

3. **Pendule simple**

Un pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle m suspendue à une tige rigide de longueur L et de masse négligeable. L'ensemble peut tourner sans frottement tout autour de l'axe Δ perpendiculaire à la feuille.

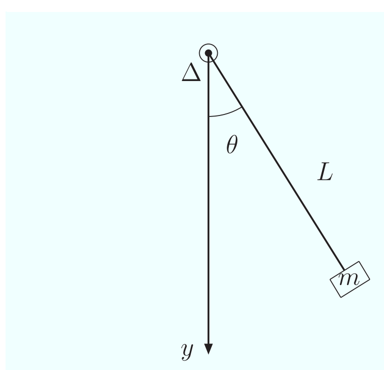

Figure 5: Pendule simple.

(a) Écrire l'expression de l'énergie potentielle E_p de la masse m et représenter le graphe $E_p(\theta)$. Représenter ensuite, sur le même graphe, les variations correspondantes de E_c.

(b) A l'aide de ces courbes décrire le mouvement du pendule pour les valeurs suivantes de l'énergie mécanique : $E_1 = m\,g\,L$, $E_2 = 2\,m\,g\,L$ et $E_3 = 3\,m\,g\,L$.

(c) Retrouver l'équation différentielle du mouvement pour $\theta(t)$ à partir de la conservation de l'énergie mécanique.

(d) Résoudre cette équation dans le cas des petites oscillations avec les conditions initiales :

$$\theta(t=0) = \theta_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{\theta}(t=0) = 0.$$

4. **De la Terre à la Lune**

(a) i. Rappeler l'expression de la force d'attraction gravitationnelle exercée par une planète de masse M_P sur un corps S de masse m_S. Exprimer l'énergie potentielle du système constitué par ces deux corps.

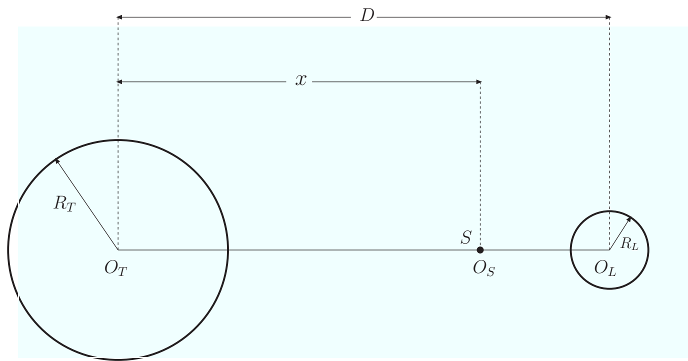

Figure 6: Représentaion schématique du système aligné Terre-Lune-S

ii. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de gravitation $E_p(r)$ du système composé de la Terre, de la Lune (distantes de D) et d'un corps S de masse m en supposant que ce dernier se situe sur la droite qui joint les centres de gravité de la Terre et de la Lune (cf. figure 6). On repère la position du corps S par sa distance $OS = x$ au centre de la Terre. On exprimera en fonction de D et de x l'énergie potentielle des trois sous-systèmes : Terre-Lune, Terre-S, Lune-S.

(b) Donner l'allure de la courbe représentative de $E_p(r)$. Montrer qu'il existe une position "d'équilibre" du corps S dont on déterminera la position et la nature.

(c) Quelle énergie minimum faut-il fournir au corps S pour que, partant de la surface de la Terre, il arrive à la surface de la Lune ? Quelle est alors sa célérité lors de l'impact ?

On utilisera les données suivantes : $m = 1$ kg ; $M_T = 6\;10^{24}$ kg ; $M_L = 7{,}3\;10^{22}$ kg ; $R_T = 6400$ km ; $R_L = 1700$ km. La distance Terre-Lune (de centre à centre) est $D = 380\;000$ km et la constante de gravitation vaut $G = 6{,}7\;10^{-11}$ SI.

1.2 Travail - Variation d'énergie cinétique

1. **Travail de la force de gravitation au voisinage de la surface de la Terre**

Calculer le travail de la force de gravitation d'une masse m dans un déplacement d'un point P situé à la distance r du centre de la terre O à un point P' situé à la distance r' lorsque O, P et P' ne sont pas alignés. Donner une expression approchée de ce travail dans le cas où r et r' sont voisins de R_T (rayon de la Terre).

2. **Travail- intégration curviligne - énergie potentielle**

   Soit la force $\overrightarrow{F}$ dont les composantes cartésiennes sont dans le plan xOy , i.e.,

$$\overrightarrow{F} = K\, y\, \hat{e}_x + K\, x\, \hat{e}_y,$$

   où K est une constante et $\hat{e}_x$ et $\hat{e}_y$ sont les vecteurs unitaires dans les directions x et y.

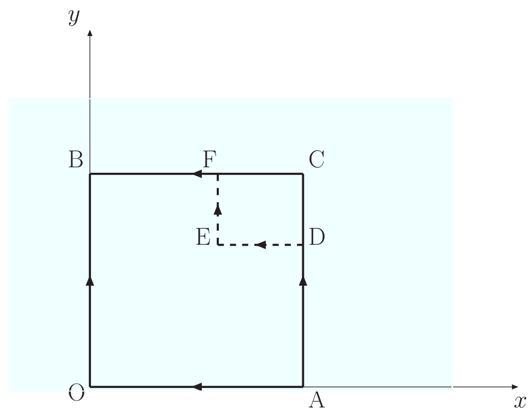

Figure 7: Travail selon différents chemins

   Calculer le travail de cette force dans un déplacement, sous l'action de cette force, de $A = (a, 0)$ à $B = (0, b)$ sur les parcours (voir figure 7) AOB, ACB, $ADEFB$ avec $D = (a, d)$, $E = (e, d)$ et $F = (e, b)$ ..... ou tout autre parcours à votre convenance et vérifier qu'il est bien indépendant du trajet suivi. Calculer ensuite le travail dans un déplacement de $A = (a, 0)$ à $G = (5a, 3b)$ sur au moins deux chemins distincts. Conclusions ?

   Reprendre ensuite pour une force $\overrightarrow{F}'$

$$\overrightarrow{F}' = \alpha\, (y - x)\, \hat{e}_x + \beta\, x\, y\, \hat{e}_y,$$

   dans un déplacement de $O = (0, 0)$ à $C = (a, b)$. Cette force est-elle conservative ?

3. **Soulèvement d'une masse**

   On soulève verticalement jusqu'à une hauteur h, avec une force $\overrightarrow{F}$ uniforme et constante, un objet de masse m initialement posé sur le sol.

   (a) Quel travail doit-on fournir ? Pourquoi est-il différent de mgh ?

   (b) Quelle énergie lui transfère-t-on ? Sous quelle forme ?

   (c) Quelle est la puissance moyenne développée par l'opérateur ? Comment la minimiser ?

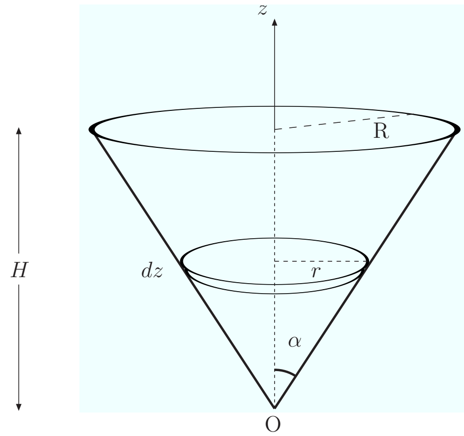

Figure 8:

4. **Vidage d'un cuve enterrée**

   Une cuve ayant la forme d'un cône de révolution (de demi-angle au sommet α et de hauteur H) est complètement enfoncée dans le sol, le sommet O en bas et la base au niveau du sol. Elle est initialement entièrement remplie de sable de masse volumique uniforme ρ. On oriente l'axe de révolution (vertical) Oz vers le haut.

   (a) On veut vider complètement cette cuve. Comment faut-il procéder pour dépenser le moins possible d'énergie ? Donner par analyse dimensionnelle l'expression de cette énergie en fonction des données de l'énoncé.

   (b) Quel est le travail W nécessaire pour vider complètement cette cuve et placer le sable juste au niveau du sol. On exprimera W en fonction de H, g, ρ et α? dans un premier temps, puis en fonction de M (masse totale du sable), g et H. (Rép : $W = \pi\, \rho\, g\, \mathrm{tg}^2\alpha\, H^4/12$).)

   (c) Estimer numériquement ce travail pour $\alpha = \pi/4$; $\rho = 4000$ kg·m^{-3}; $H = 2$ m (Rép : 100 000 J)

5. **Bloc et frottements**

   Un bloc de masse m est lancé avec une vitesse initiale v_0 sur un plan horizontal. Le coefficient de frottement (supposé visqueux) sur le plan est désigné par μ.

   (a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, calculer la distance parcourue par le bloc jusqu'à ce qu'il s'arrête.

   (b) Calculer le travail de la force de frottement et le comparer à la variation de l'énergie cinétique au cours du mouvement.

   (c) Mêmes questions pour un frottement solide.

1.3 Chariot de foire

Un chariot de foire glissant sans frottement sur des rails inclinés (auxquels il n'est pas fixé) arrive sur une boucle circulaire verticale de rayon R.

1. De quelle hauteur h doit-il être lâché sans vitesse initiale pour pouvoir atteindre un point M quelconque de la boucle ? le sommet S ?

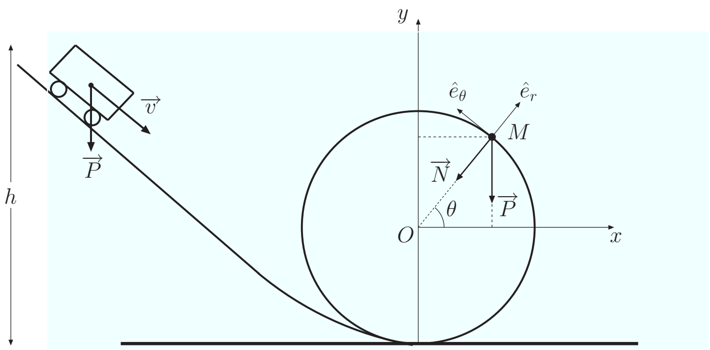

Figure 9: Chariot de foire lâché depuis la hauteur h.

2. A quelle condition portant sur la hauteur h de départ accepteriez-vous de monter dans ce chariot ?

1.4 Collision élastique entre 2 particules

On veut étudier le choc élastique de deux particules de masses m_1 et m_2. Avant le choc, m_1 a une vitesse $\overrightarrow{v}_1$ dirigée suivant l'axe $x'x$. Elle vient percuter la masse m_2 au repos en O. Soient θ_1 et θ_2 les angles que font les vitesses $\overrightarrow{v}'_1$ et $\overrightarrow{v}'_2$ après le choc.

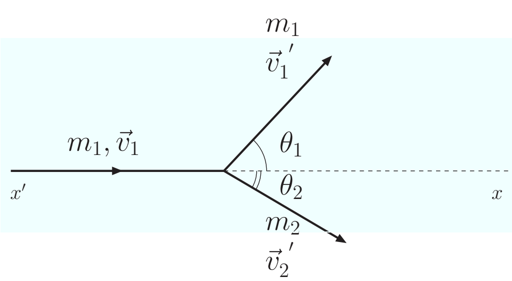

Figure 10: Collision de la particule de masse m_1, animée d'une vitesse $\vec{v}_1$, sur une particule de masse m_2 au repos.

1. Écrire les équations qui permettraient de calculer $\overrightarrow{v}'_1$, $\overrightarrow{v}'_2$ et θ_2 en fonction de m_1, m_2, $\overrightarrow{v}_1$ et θ_1. On rappelle la relation :

$$E'_{c2} = \frac{4\, m_1\, m_2}{(m_1 + m_2)^2}\, E_{c1}\, \cos^2\theta_2 \qquad (1)$$

où E'_{c2} est l'énergie cinétique de la particule-cible après le choc et E_{c1} l'énergie cinétique de la particule incidente avant le choc.

2. Étudier et tracer le graphe de E'_{c2} en fonction du rapport $\mu = m_1/m_2$.

3. Application aux réacteurs nucléaires : les neutrons issus de la fission ont des énergies de l'ordre de 1 MeV, trop élevées pour produire de nouvelles fissions : la réaction en chaîne ne peut s'amorcer que s'ils sont ralentis. Il est donc nécessaire d'utiliser un modérateur qui transforme les neutrons rapides en neutrons lents (ou "thermiques"). Expliquer pourquoi la relation (1) suggère d'introduire des éléments légers de masse m_2 comme modérateurs dans le cœur des réacteurs. Calculer la valeur en eV de l'énergie cinétique d'un neutron lent de masse m_1 et de célérité $v = 2\ 10^3$ m·s^{-1}.

4. Que devient la relation (1) pour $m_2 >> m_1$? Passant à la limite m_2 infinie, montrer qu'une balle abandonnée sans vitesse initiale depuis une hauteur h rebondirait jusqu'à cette même hauteur ? Pourquoi ceci n'est-il pas vérifié dans la pratique ?

5. Cas d'un choc frontal : on suppose que $\theta_2 = 0$.

   (a) Déterminer $\overrightarrow{v}'_1$ et $\overrightarrow{v}'_2$ en fonction de m_1, m_2 et $\overrightarrow{v}_1$.

   (b) Déterminer θ_1.

   (c) Application : détermination de la masse du neutron (Chadwick 1932). Avec des neutrons de masse m et de célérité v_1 (toutes deux inconnues) on bombarde une cible contenant des noyaux d'hydrogène de masse m_H puis une autre cible contenant des noyaux d'azote de masse m_N ($m_N = 14\, m_H$). On mesure les vitesses des atomes d'hydrogène et d'azote après le choc et on trouve : $v'_H/v'_N = 7,5$ dans la direction $\theta_2 = 0$. En déduire la valeur de m/m_H.

1.5 Chaînette

Une chaîne inextensible (longueur $AB = L$, de masse totale par unité de longueur $\mu = dm/dx$ homogène) repose sur une table horizontale. À l'instant $t = 0$, alors que son extrémité B est à la distance x_0 du plan de la table, on lâche la chaîne sans vitesse initiale. On négligera les frottements.

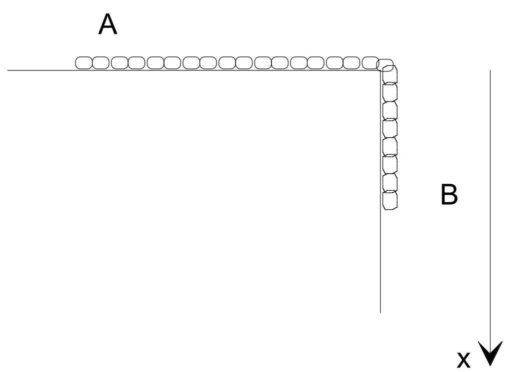

Figure 11: Chaînette.

1. Exprimer les énergies cinétique, potentielle et mécanique de la chaîne en fonction de la distance $x(t)$ de B au plan de la table et de la composante $v_x(t) = \dot{x}(t)$ de la vitesse $v(t)$ de B.

2. En exprimant la conservation de l'énergie, établir puis résoudre l'équation différentielle du mouvement.

3. Étudier et tracer les variations de $\dot{x}(t$ et de la position $x(t)$.

4. Au bout de combien de temps la chaîne quittera-t-elle la table ? Avec quelle célérité ?

1.6 Frottements sur satellite

On suppose que, par suite de chocs avec des molécules contenues dans les couches supérieures de l'atmosphère, un satellite d'altitude z, de vitesse v et de masse m est soumis à une force de frottement de module $f = k\,m\,v^2/2$, opposée à la vitesse. Ce module est supposé être très inférieur à celui de la force d'attraction terrestre de sorte qu'après une révolution pratiquement circulaire l'altitude subit une très petite variation $\Delta z \ll z$. $R = 6400$ km est le rayon de la terre et $g_0 \approx 10$ m/s^2 la pesanteur au sol.

1. Exprimer la variation de vitesse Δv en fonction de Δz et la période T.
2. Déterminer le coefficient k en fonction de R, z, Δz.
3. Expliquer par des considérations énergétiques pourquoi la vitesse du satellite augmente.
4. Exprimer le travail des forces de frottement à chaque révolution et le comparer à la variation d'énergie du satellite.

On suppose maintenant que la force de frottement a un module $f = \lambda_0 v^n$ (avec λ_0 et n constantes positives) et est opposée à la vitesse. Cette force de frottement entraîne une faible variation de l'altitude du satellite pendant le temps dt ; on posera $dz = -C dt$, (C : constante positive de faible valeur).

1. Déterminer la seule valeur possible pour n et en déduire la dimension de λ_0.
2. Exprimer λ_0 en fonction de m, C, g_0, R.

2 Travaux participatifs

2.1 Énergie potentielle et force

Une masse ponctuelle m est soumise à une force conservative radiale. Son énergie potentielle est représentée par le graphe de la figure 12.

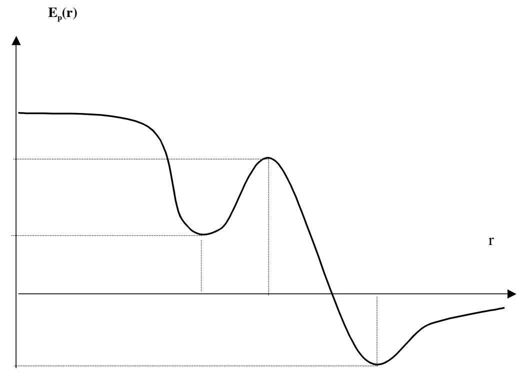

Figure 12: Graphe de l'énergie potentielle.

1. Ce graphe met en évidence des domaines où la force $\overrightarrow{F}(r) = F_r(r)\,\hat{e}_r$, $\hat{e}_r$ désignant le vecteur unitaire dans la direction radiale, a des sens différents : préciser les uns et les autres.
2. En déduire les positions d'équilibre, et discuter leur stabilité.
3. en choisissant une valeur arbitraire E_0 de l'énergie mécanique totale indiquer les régions inaccessibles par la masse et représenter graphiquement l'énergie cinétique en fonction de la position.

2.2 Saut à la perche - saut en hauteur

Expliquer la technique du saut à la perche et quel lien peut-on établir entre les différentes formes d'énergie qui entrent en jeu. Sauriez vous estimer la hauteur maximale que l'on peut espérer atteindre ? Pourquoi un sauteur en hauteur ne cherche-til pas à avoir une vitesse maximale avant de sauter ? Par comparaison quelle hauteur maximale pensez-vous qu'il puisse atteindre ?

2.3 Pendule balistique

Un projectile de masse m et de célérité horizontale V_0 est lancé contre un sac plein de sable de masse M formant la partie inférieure d'un système mobile autour d'un axe horizontal O. Le projectile s'immobilise dans le sable, l'ensemble démarrant avec la vitesse $\overrightarrow{v}$.

1. Déterminer $\overrightarrow{v}$.
2. On veut déterminer la hauteur h à laquelle s'élève ce pendule. Calculer la variation d'énergie potentielle correspondante. Calculer ensuite la variation d'énergie cinétique correspondante et en déduire h.

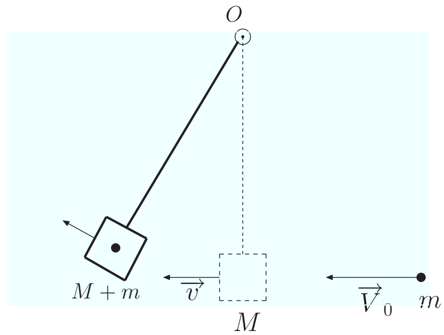

Figure 13: .

2.4 Extrait du partiel du 14 mars 1998

Un cerceau de rayon R et de centre O, tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ constante autour d'un axe vertical Δ passant par un diamètre (cf. figure 14). Une perle, assimilée à un point matériel M de masse m, est libre de se déplacer sans frottement le long du cerceau. Sa position est repérée par l'angle θ (que fait le segment OM avec la verticale) ou par h (son altitude repérée par rapport au point le plus bas du cerceau.) On distingue deux référentiels : $\mathfrak{R}$, centré en O, lié à la Terre et que l'on supposera d'inertie et $\mathfrak{R}'$, lié au cerceau centré en O' confondu avec O.

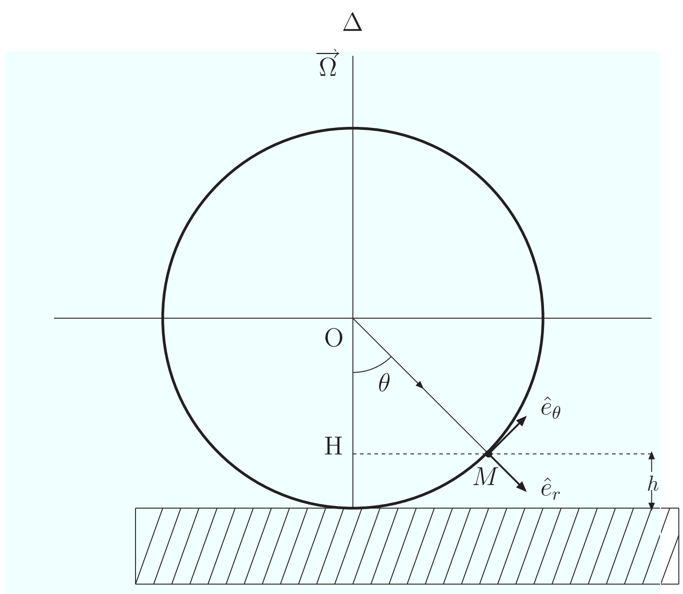

Figure 14: .

L'énergie potentielle de pesanteur de la perle est donnée par l'expression suivante :

$$E_p(\theta) = m\, g\, R\left[1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^2 \sin^2\theta\right].$$

1. Pour représenter graphiquement cette énergie potentielle dans les deux cas suivants $\Omega_1 = \Omega_c/\sqrt{2}$ et $\Omega_2 = \sqrt{2}\,\Omega_c$ et pour tout le domaine de variation de $\theta(-\pi < \theta < \pi)$, on cherchera les extrema de la fonction $E_p(\theta)$ et on calculera les valeurs de $E_p(\theta)$ pour quelques valeurs simples de θ (par exemple $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$; $\theta = \pi/3$; $\theta = 2\pi/3$). On utilisera une échelle totale sur chacun des axes d'au moins 10 cm.

2. Déterminer les points d'équilibre du système pour les deux valeurs Ω_1 et Ω_2 et discuter leur stabilité.

3. Le système se trouvant en l'un ses points d'équilibre stable $\theta = \theta_0$ pour $\Omega = \Omega_2$, on écarte légèrement la perle de sa position d'équilibre : $\theta = \theta_0 + \epsilon$ (avec $\epsilon << \theta_0$). Décrire d'abord qualitativement le mouvement de la perle (on exprimera pour cela, après l'avoir justifiée, la conservation de son énergie mécanique) puis établir l'équation différentielle qui le régit. Caractériser sa nature en indiquant sa pulsation propre. On rappelle le développement limité suivant :

$$\cos(\theta_0 + \epsilon) = \cos\theta_0 - \epsilon\ \sin\theta_0 - \frac{\epsilon^2}{2}\ \cos\theta_0 + O(\epsilon^3).$$