Maandag, 18 Julie 2011

Vraag 1. Vir enige versameling $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ van vier verskillende positiewe heelgetalle dui ons die som $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ met s_A aan. Laat n_A die aantal pare (i, j) met $1 \leq i < j \leq 4$ wees waarvoor $a_i + a_j$ 'n deler van s_A is. Bepaal alle sulke versamelings A waarvoor n_A sy grootste moontlike waarde bereik.

Vraag 2. Laat $\mathcal{S}$ 'n eindige versameling van minstens twee punte in die vlak wees. Aanvaar dat geen drie punte op 'n gemene lyn lê. 'n *Windmeul* is 'n proses wat met 'n lyn ℓ begin wat deur 'n enkele punt $P \in \mathcal{S}$ gaan. Die lyn roteer kloksgewys om die *senter* P totdat die lyn vir die eerste keer 'n ander punt in $\mathcal{S}$ bereik wat ons Q noem. Die lyn gaan voort met sy kloksgewyse rotasie, met Q as die nuwe senter, totdat die lyn weer 'n punt in $\mathcal{S}$ bereik. Hierdie proses gaan oneindig voort.
Toon aan dat ons 'n punt P in $\mathcal{S}$ en 'n lyn ℓ deur P kan kies sodat daar 'n windmeul ontstaan waarby elke punt van $\mathcal{S}$ oneindig baie keer as 'n senter gebruik word.

Vraag 3. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 'n funksie met reële waardes wees wat op die versameling van alle reële getalle gedefineer word. Die funksie bevredig

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

vir alle reële getalle x en y. Bewys dat $f(x) = 0$ vir alle $x \leq 0$.

Tyd: 4 uur 30 minute
Elke vraag tel 7 punte.

Dinsdag, 19 Julie 2011

Vraag 4. Laat $n > 0$ 'n heelgetal wees. Ons het 'n weegskaal en n gewigte met massa 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Ons wil elk van die n gewigte op die weegskaal plaas, een by een, op só 'n manier dat die regter skaal nooit swaarder as die linker skaal is nie. In elke stap kies ons een van die gewigte wat nog nie geplaas is nie, en ons plaas dit óf op die linker skaal óf op die regter skaal, totdat al die gewigte geplaas is.

Bepaal die aantal maniere om dit uit te voer.

Vraag 5. Laat f 'n funksie van die versameling van alle heelgetalle na die versameling van alle positiewe heelgetalle wees. Aanvaar dat die verskil $f(m) - f(n)$ vir enige twee heelgetalle m en n deelbaar is deur $f(m-n)$. Bewys dat vir alle heelgetalle m en n met $f(m) \leq f(n)$, $f(n)$ deelbaar is deur $f(m)$.

Vraag 6. Laat Γ die omgeskrewe sirkel van 'n skerphoekige driehoek ABC wees. Laat ℓ 'n raaklyn aan Γ wees, en laat ℓ_a, ℓ_b en ℓ_c die lyne wees wat verkry word as ℓ om die lyne BC, CA en AB respektiewelik gereflekteer word. Toon aan dat die omgeskrewe sirkel van die driehoek wat deur die lyne ℓ_a, ℓ_b en ℓ_c gevorm word aan die sirkel Γ raak.

Tyd: 4 uur 30 minute
Elke vraag tel 7 punte.