Prof : Mr. CHEBBI Khalil
www.khalilo-maths.blogspot.com
fb/ KhMathematiques
N° GSM (+216) : 22275371 - 97108370

Juin 2013

Module Probabilités

Série n°1
Espaces probabilisés

Exercice 1 :

Soit A, B , $(A_k)_{k\in I}$ des événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$. Montrer les propriétés suivantes.

1) $A = B \Leftrightarrow 1_A = 1_B$ 2) $A \subset B \Leftrightarrow 1_A \leq 1_B$ 3) $1_{A\cap B} = 1_A 1_B$
4) $1_{\bar{A}} = 1 - 1_A$ 5) $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$ 6) $1_{A\Delta B} = |1_A - 1_B|$
7) $1_{\bigcap_{i\in I} A_i} = \inf_{i\in I} 1_{A_i}$ 8) $1_{\bigcup_{i\in I} A_i} = \sup_{i\in I} 1_{A_i}$

Exercice 2 :

Soit $(A_k)_{k\geq 1}$ une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$.

1) Donner l'écriture ensembliste des événements suivants :
   Au moins l'un (resp. aucun) des événements $(A_k)_{k\geq 1}$ se réalise (resp. ne se réalise).

Expliciter ces événements lorsque $\Omega = \mathbb{R}$ et $A_k = \left[\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right], \forall k \geq 1$.

2) Interpréter les événements suivants, donnés par leurs écritures ensemblistes,
   $\liminf A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k$ et $\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$.
   Expliciter ces événements lorsque :
   i/ $A_{2n} = A_2$ et $A_{2n+1} = A_1, \forall n$;
   ii/ $\Omega = \mathbb{R}$ et $A_k = \left[\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right], \forall k \geq 1$;
   iii/ $A_{2n} = \left[-1, 2 + \frac{1}{n}\right]$ et $A_{2n+1} = \left[-2 - \frac{1}{n}, 1\right], \forall n$;
   iv/ $A_k =]-\infty, a_k]$ et $(a_k)_k$ est une suite de nombre réels.

Exercice 3 :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A, B et $(A_n)_n$ des événements.

1) Montrer les propriétés suivantes :
   i/ Si $\mathbb{P}(A) = 1$ alors $\mathbb{P}(B \backslash A) = 0$.
   ii/ Si $\mathbb{P}(A) = 0$ alors $\mathbb{P}(B \cap A) = 0$ et $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B)$.
2) On suppose que la suite $(A_n)_n$ est une suite croissante (resp. décroissante) d'événements.
   Montrer les propriétés suivantes :
   $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mathbb{P}(A_n)$ (resp. $\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \downarrow \mathbb{P}(A_n)$) (Beppo-Levy).
3) Montrer les inégalités suivantes :
   $\mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup A_n)$. (Fatou)

On dit que la suite $(A_n)_n$ est convergente si $\liminf A_n = \limsup A_n$ (qu'on notera $\lim A_n$).

Vérifier que dans ce cas, $\left(\mathbb{P}(A_n)\right)_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$ et que $\lim \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\lim A_n)$.

Exercice 4 :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A & B deux événements. On pose

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \alpha, \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \beta, \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \gamma, \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \delta.$$

1) Calculer $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.
2) Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \alpha\delta - \beta\gamma$.
3) Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4}$ (donner des exemples d'égalité).

Exercice 5 :

Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1) Montrer que $1_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = 1 - \prod_{k=1}^{n}\left(1 - 1_{A_k}\right)$. En déduire la formule de Poincaré
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{k_1 < \cdots < k_r} \mathbb{P}\left(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_r}\right).$$
2) Un facteur répartit au hasard n factures dans n boîtes aux lettres, une par boîte. Calculer les probabilités suivantes :
   - i/ Chaque facture arrive à destination.
   - ii/ Au moins une facture arrive à destination.
   - iii/ Aucune facture n'arrive à destination.

Exercice 6 : (Problème de Galilée)

Le prince de Toscane demande un jour à Galilée : « Pourquoi lorsqu'on jette trois dés non pipés obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces sommes soient obtenues de six façons différentes? ». Construire un modèle probabiliste et traduire la question posée en terme de calcul de probabilité.

Exercice 7 :

On joue à « pile » ou « face » avec une pièce de monnaie, pas nécessairement équilibrée. On effectue une infinité de tirage. Montrer que l'événement « tous les tirages ont donné pile » est de probabilité nulle.

Exercice 8 :

Un fumeur a dans chacune de ses deux poches une boîte contenant au départ N allumettes. Chaque fois qu'il désire fumer une cigarette, il choisit une poche au hasard. Calculer la probabilité p pour que, le fumeur se rendant compte pour la première fois qu'une boite est vide, l'autre contienne encore a allumettes $(a \in \{0,1, \ldots \ldots N\})$.