Leçon 09 : Triangles

1 Construction de triangles

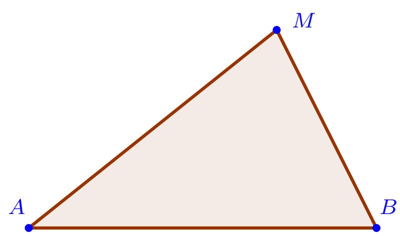
On peut construire un triangle dans les 3 cas suivants :
- on connaît la longueur des 3 côtés
- on connaît la longueur de 2 côtés et la mesure de l'angle délimité par ces côtés
- on connaît la longueur d'un côté et la mesure des 2 angles adjacents à ce côté

2 Inégalité triangulaire

2.1 Cas général

En géométrie euclidienne, le plus court chemin entre 2 points est la ligne droite. Tout autre chemin, passant par un 3ème point, est soit plus long, soit de même longueur.
En conséquence, on peut énoncer la propriété suivante :

Propriété 1. *Si A, B et M sont 3 points quelconques, alors $AB \leq AM + MB$.*



Dans le triangle ABM, on a également : $AM \leq AB + BM$ et $MB \leq MA + AB$.

2.2 Cas d'égalité

Propriété 2. *Si un point M appartient à un segment $[AB]$, alors $AB = AM + MB$.*

Propriété 3. *Si 3 points A, B et M sont tels que $AB = AM + MB$, alors le point M appartient au segment $[AB]$.*

2.3 Application aux triangles

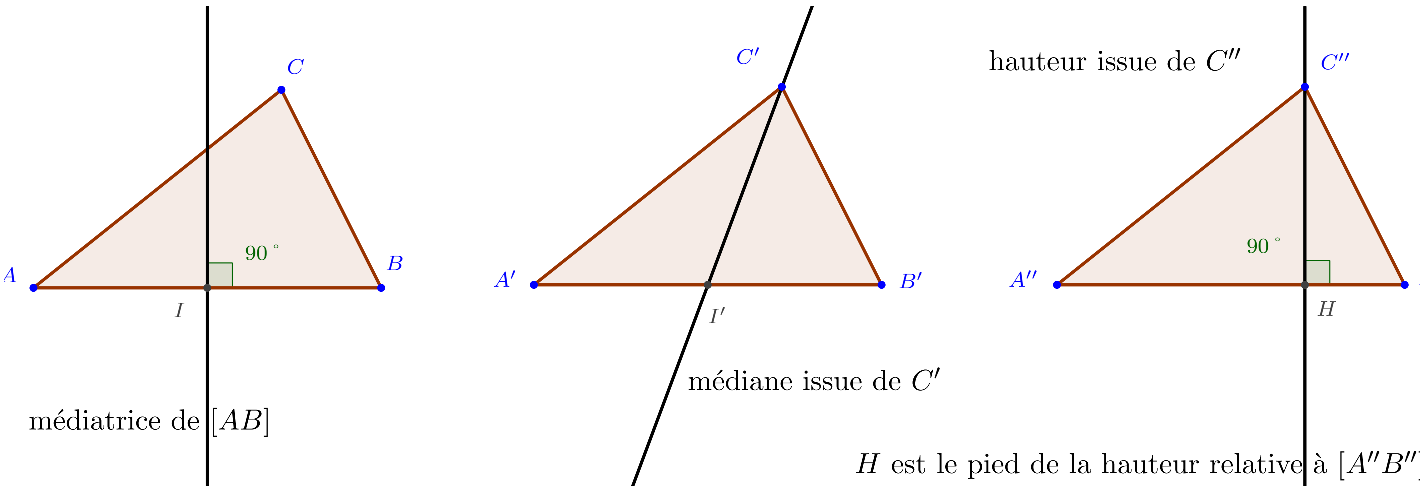
Pour pouvoir construire un triangle ayant pour côtés 3 longueurs données, il faut que chaque longueur soit inférieure à la somme des 2 autres. Cependant, dans la pratique, il suffit de vérifier que la plus grande longueur est inférieure à la somme des 2 autres.

3 Droites remarquables d'un triangle

Définition 1.
La médiatrice *d'un côté d'un triangle est la droite perpendiculaire à ce côté et passant par son milieu.*

Définition 2. *Une* médiane *d'un triangle est une droite qui passe par un sommet de ce triangle et le milieu de côté opposé à ce sommet.*

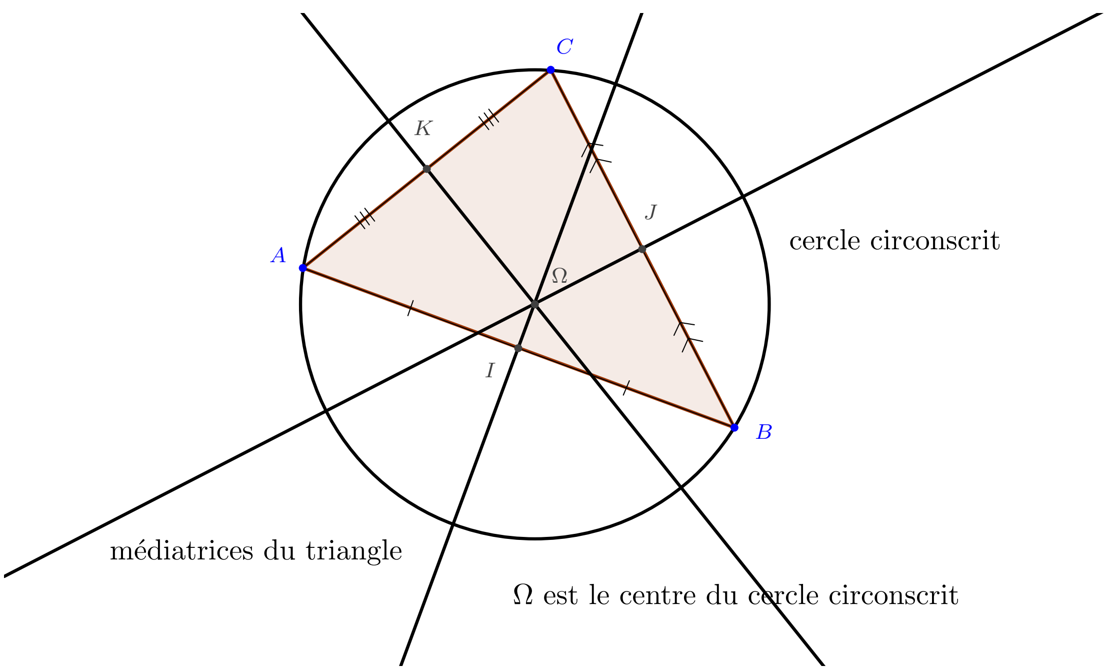
Définition 3. *Une* hauteur *d'un triangle est une droite qui passe par un sommet de ce triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.*



Rappels de propriétés :
- si un point se trouve sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment
- si un point se trouve à égale distance de 2 points, alors il appartient à la médiatrice du segment ayant pour extrémités ces 2 points

4 Cercle circonscrit à un triangle

Définition 4. *Le* cercle circonscrit *à un triangle est le cercle passant par les 3 sommets de ce triangle.*



Propriété 4. *Les 3 médiatrices*[1] *des côtés d'un triangle se coupent en un même point*[2]*, c'est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.*

1. Le point d'intersection des 3 médiatrices s'appelle le *point de concours* des médiatrices.
2. On dit que les médiatrices sont concourantes.

5 Exercices

1 Construire un triangle ABC tel que : $AB = 7\ cm$, $BC = 5{,}7\ cm$ et $AC = 6{,}2\ cm$.

2 Construire 2 triangles ABC non superposables[3] tels que : $AB = 5{,}2\ cm$, $BC = 3{,}3\ cm$ et $\widehat{BAC} = 35^\circ$.

3 Jacques donne par téléphone les devoirs à son ami Frédéric :
« Tu places 2 points A et B distants de 7,5 cm. Place un point C situé à 3 cm de A et à 4 cm de B. »
Mais Frédéric ne parvient pas à tracer la figure. Expliquer pourquoi.

4 Construire un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = 6\ cm$ et $BC = 4\ cm$.
1. Construire la hauteur issue de A.
2. Que peut-on dire de la médiatrice de $[BC]$ et de la médiane issue de A ?
3. Qu'en est-il de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$?

5 Construire un triangle MNP rectangle en M. Construire les 3 hauteurs du triangle. Que constate-t'on ?

6 Trois villes Alfortville, Bonneuil-sur-Marne et Créteil décident de financer conjointement la construction d'un centre équestre. Les maires souhaiteraient que le centre équestre se situe à égale distance des 3 villes.

Construire le centre équestre sur le plan çi-dessus.

7 Soit un triangle ABC tel que $AB = 12\ cm$, $AC = 10\ cm$ et $BC = 13\ cm$.
Construire les 3 médianes du triangle. Que constate-t'on[4] ?

8 Vrai ou faux ?
1. Il existe toujours un cercle passant par 3 points non alignés.
2. Il existe toujours un cercle passant par 3 points.
3. Le centre du cercle circonscrit à un triangle est toujours à l'intérieur à l'intérieur de ce triangle.
4. Le point d'intersection des hauteurs d'un triangle se trouve toujours à l'intérieur du triangle.

9 Tracer à main levée une ligne courbe $\mathscr{L}$ et placer 2 points A et B de part et d'autre de cette ligne. Trouver au moins un point de la ligne courbe $\mathscr{L}$ qui soit équidistant de A et B.

10 Soit un segment $[AB]$. Construire 3 triangles quelconques ABM, ABN et ABP.
Démontrer que les centres des cercles circonscrits à chacun des 3 triangles sont alignés.

11 Soit 2 droites Δ et Δ' sécantes en O et un point A n'appartenant pas aux droites.
Construire le point P, symétrique du point A par rapport à la droite Δ.
Puis le point M, symétrique du point P par rapport à la droite Δ'. Démontrer que l'on a $OA = OM$.

3. Deux figures superposables coïncideraient parfaitement si on les plaçait l'une sur l'autre.
4. Les 3 médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé le *centre de gravité*.