

Le Produit Scalaire

(En première S)

Dernière mise à jour : Mercredi 12 Décembre 2010

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2010-2011)

J'aimais et j'aime
encore les mathéma-
tiques pour elles-mêmes
comme n'admettant
pas l'hypocrisie et le
vague, mes deux bêtes
d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1	Définition et Propriétés	4
1.1	Définition du produit scalaire	4
1.2	Produit scalaire et commutativité	4
1.3	Produit scalaire et vecteurs colinéaires	4
1.4	Produit scalaire et vecteurs orthogonaux	5
2	Interprétation géométrique	5
2.1	Définition géométrique du produit scalaire	5
2.2	Retour aux propriétés du produit scalaire	7
2.3	Remarques et exemples	7
3	Produit scalaire et opérations	8
3.1	Distributivité du produit scalaire	8
3.2	Linéarité du produit scalaire	8
3.3	Autres définitions du produit scalaire	9
4	Expression analytique du produit scalaire	10
4.1	Coordonnées d'un vecteur	10
4.2	Expression analytique d'un produit scalaire	11
5	Les différentes expressions du produit scalaire	11

1 Définition et Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

1.1 Définition du produit scalaire

Définition 1

On appelle **produit scalaire** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

Remarque :

► Si l'un des vecteurs est nul alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

1.2 Produit scalaire et commutativité

Propriété 1

$$\forall \vec{u}, \forall \vec{v} \text{ on a } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Démonstration :

$$\forall \vec{u}, \forall \vec{v} \text{ on a } \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$$

$$\text{donc } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

1.3 Produit scalaire et vecteurs colinéaires

Propriété 2

On note \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs colinéaires. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

Si $\lambda > 0$ (\vec{u} et \vec{v} dans le même sens) alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Si $\lambda < 0$ (\vec{u} dans le sens contraire de \vec{v}) alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Démonstration :

On note \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs colinéaires. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

► Si $\lambda > 0$ alors $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1$ donc

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

► Si $\lambda < 0$ alors $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -1$ donc

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

1.4 Produit scalaire et vecteurs orthogonaux**Propriété 3**

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls, alors $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Démonstration :

► (\Rightarrow) :

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ►

(\Leftarrow) :

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$

alors $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$ donc $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc $\vec{u} \perp \vec{v}$

Remarque :

Si $\vec{u} = \vec{v}$ alors $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = 1$ donc $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Définition 2

On nomme **carré scalaire de \vec{u}** le nombre réel noté \vec{u}^2 tel que

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

2 Interprétation géométrique

On note \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

Soient O , A et B trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

2.1 Définition géométrique du produit scalaire

Définition 3 (Autre définition du produit scalaire)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

où \overrightarrow{OH} est le projeté orthogonal de \overrightarrow{OB} sur (OA)

Démonstration :

► Premier cas :

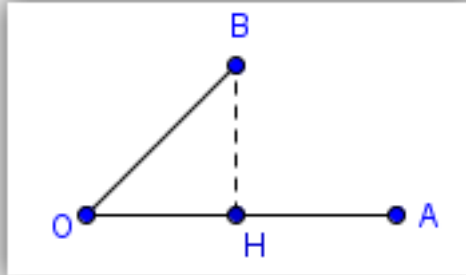


Figure 1

Dans le triangle OHB rectangle en H on a : $\cos(\widehat{OA, OB}) = \cos(\widehat{HOB}) = \frac{OH}{OB}$

d'où $OB \times \cos(\widehat{OA, OB}) = OH$

donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{OA, OB}) = OA \times OH = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$

donc

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

⇒ Deuxième cas :

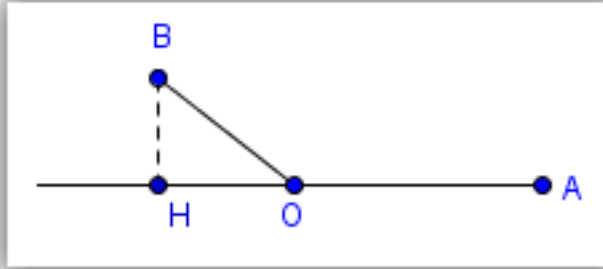


Figure 2

Dans le triangle HOB rectangle en H on a : $\cos(\widehat{OH, OB}) = \cos(\widehat{HOB}) = \frac{OH}{OB}$
 or $\widehat{HOB} = \pi - \widehat{AOB}$ d'où $\cos(\pi - \widehat{AOB}) = \frac{OH}{OB} = -\cos(\widehat{AOB})$ [Rappel :
 $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$]
 donc $OB \times \cos(\widehat{AOB}) = -OH$
 donc $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{OA, OB}) = OA \times (-OH) = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$
 donc $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$

2.2 Retour aux propriétés du produit scalaire

2.3 Remarques et exemples

⇒ Propriété n° 3 :

Si $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ alors le projeté orthogonal de B sur (OA) est 0 donc $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$

⇒ Propriété n° 1 :

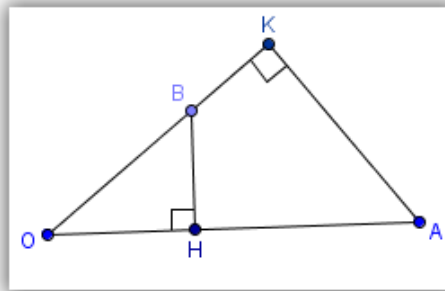


Figure 3

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$ et $\vec{OB} \cdot \vec{OA} = \vec{OB} \cdot \vec{OK}$ donc d'après la propriété 1 on a

$$\boxed{\vec{OA} \cdot \vec{OH} = \vec{OB} \cdot \vec{OK}}$$

Première remarque :

2

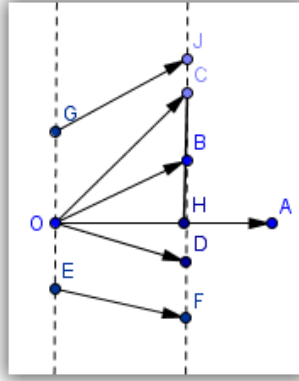


Figure 4

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= \vec{OA} \cdot \vec{OH} \\ &= \vec{OA} \cdot \vec{OC} \\ &= \vec{OA} \cdot \vec{OD} \\ &= \vec{OA} \cdot \vec{EF} \\ &= \vec{OA} \cdot \vec{GJ} \end{aligned}$$

3 Produit scalaire et opérations

3.1 Distributivité du produit scalaire

Propriété 4 (A admettre)

On note \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs.

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ (2) \quad (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} &= \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

3.2 Linéarité du produit scalaire

Propriété 5

On note \vec{u} , \vec{v} et α un réel

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) &= \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} \\ (2) \quad (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Démonstration :

Démontrons que $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) &= \|\vec{u}\| \times \|\alpha \vec{v}\| \cos(\vec{u}, \alpha \vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\| \times |\alpha| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \alpha \vec{v}) \\ &= |\alpha| \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \alpha \vec{v}) \end{aligned}$$

Il faut maintenant envisager trois cas :

► Si $\alpha > 0$ alors $|\alpha| = \alpha$ et $\cos(\vec{u}, \alpha \vec{v}) = \cos(\vec{u}, \vec{v})$

donc

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

d'où : $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v})$$

► Si $\alpha < 0$ alors $|\alpha| = -\alpha$ et $\cos(\vec{u}, \alpha \vec{v}) = \cos(\pi + (\vec{u}, \vec{v})) = -\cos(\vec{u}, \vec{v})$

donc

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) &= -\alpha \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| [-\cos(\vec{u}, \vec{v})] \\ &= \alpha \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

► Si $\alpha = 0$ alors $|\alpha| = 0$

donc $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$

et $\alpha \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \times \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

donc $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}$

La démonstration de $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}$ est identique.

3.3 Autres définitions du produit scalaire

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

Propriété 5

$$\begin{aligned} (1) \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ (2) \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ (3) \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

Démonstration :

(1)

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

$$\text{donc } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\text{alors } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

(2)

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

$$\text{donc } \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\text{alors } \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

(3)

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

A l'aide des formules (1) et (2) nous pouvons définir le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de la façon suivante :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$$

4 Expression analytique du produit scalaire

(O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormal et les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$

4.1 Coordonnées d'un vecteur

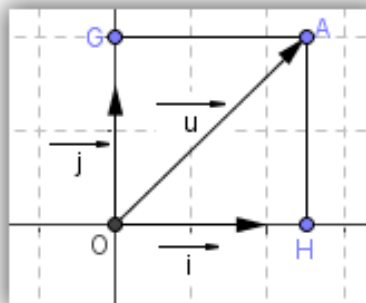


Figure 5

$$\text{On a } \vec{i} \cdot \vec{u} = \vec{i} \cdot \overrightarrow{OH} = \vec{i} \cdot x_{\vec{u}} \vec{i} = x_{\vec{u}} \vec{i} \cdot \vec{i} = x_{\vec{u}}$$

et $\vec{j} \cdot \vec{u} = \vec{j} \cdot \vec{OG} = \vec{j} \cdot y\vec{u} = y\vec{j} \cdot \vec{j} = y$

Conclusion :

Les coordonnées du vecteur \vec{u} sont $(\vec{i} \cdot \vec{u}; \vec{j} \cdot \vec{u})$

4.2 Expression analytique d'un produit scalaire

Propriété 6

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times x' + y \times y'$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + x\vec{i} \cdot y'\vec{j} + y\vec{j} \cdot x'\vec{i} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j} \\ &= xx' \|\vec{i}\|^2 + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{i} \cdot \vec{j} + yy' \|\vec{j}\|^2 \\ \text{or } \|\vec{i}\| &= \|\vec{j}\| = 1 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ car } \vec{i} \perp \vec{j} \\ \text{donc } \vec{u} \cdot \vec{v} &= xx' + yy' \end{aligned}$$

5 Les différentes expressions du produit scalaire

Voilà donc les différentes expressions que l'on peut utiliser pour exprimer le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

- (1)
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$
- (2) Si $\vec{OA} = \vec{u}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$
avec \vec{OH} le projeté orthogonal de \vec{OB} sur (OA)
- (3)
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$
- (4)
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$$
- (5) Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) si les vecteurs ont pour coordonnées $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$