Cours de traitement d'images
Enoncé d'exercices
3. Analyse de systèmes linéaires

07.12.1999

1. ***Séparabilité et transformée en*** z : *"Une transformée en z est séparable si le signal correspondant est séparable." Démontrer cette affirmation.*

2. ***Réponse fréquentielle d'un système linéaire*** : *Soit un système linéaire caractérisé par sa réponse impulsionnelle bidimensionnelle*

   $$x(k,l) \longrightarrow \boxed{g(k,l)} \longrightarrow y(k,l)$$

   où $x(k,l)$ est une image de taille 3×3 et

   $$g(k,l) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Calculer sa réponse fréquentielle bidimensionnelle continue G et en déduire son utilité. Ce système est-il stable? Que se passe-t-il si l'image $x(k,l)$ est de taille $N \times N$?

3. ***Fonction de transfert du Laplacien*** : *La définition de l'opérateur laplacien dans le domaine continu pour une fonction à deux variables $f(x,y)$ est la suivante:*

   $$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \tag{1}$$

   On peut également définir la dérivée partielle d'une fonction à deux variables $f(x,y)$ par rapport à la variable x de la façon suivante :

   $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \ . \tag{2}$$

   (a) *En utilisant l'expression de la dérivée partielle de l'équation 2, écrire l'expression de la dérivée seconde d'une fonction $f(x,y)$ par rapport à la variable x.*

   (b) *Discrétiser l'expression precédente (i.e. écrire l'équation aux différences)*

   (c) *Ecrire l'équation aux différences du Laplacien, et déterminer sa réponse impulsionnelle*

   (d) *Quel est l'effet de cet opérateur sur l'image d'entrée ?*

4. ***Mise en série de deux systèmes linéaires*** : *Soit deux systèmes définis par les équations aux différences suivantes :*

   $$\begin{aligned} y(k,l) &= x(k-1,l) + 2x(k,l) + x(k+1,l) \\ z(k,l) &= y(k,l-1) + 2y(k,l) + y(k,l+1) \end{aligned}$$

   Calculer les réponses impulsionnelle g et fréquentielle G du système obtenu par leur mise en série. A quoi peut servir un tel système?