Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur I=]1,2[par $f(x)=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

1)a- Montrer que f est dérivable sur]1,2[et calculer f'(x).

b- f est-elle dérivable à gauche en 2 ?

2) Etudier les variations de f et construire sa courbe (Cf) dans un repère orthonormé

3) Montrer que l'équation f(x)=x admet dans I une solution unique $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$

4)a- Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Soit $g(x)=f^{-1}(x)$*, construire (Cg).*

c- Montrer que pour tout x∈ J, $g(x)=1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice n°2 :

Soit *f la fonction définie sur* $[-1,1]$ *par* $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1/ Montrer que f réalise une bijection de [-1,1] sur un intervalle J que l'on précisera.

2/ Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ *par g(x)=f(x)-x*

a/ Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution sur $[-1,1]$

b/ Vérifier que $\alpha \in]\frac{2}{3}, 1[$

c/ En déduire que la droite Δ :y=x coupe la courbe C_f *de f en un point unique*

3/ Tracer les courbes C et C' respectives de f et f^{-1} *dans un même repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

4/ Montrer que pour tout x∈ J $f^{-1}(x)=\frac{-2(x-1)}{\sqrt{(3x-2)(x-2)}+x}$

Exercice n°3 :

On considère l'application f définie sur]0,4[par : $f(x)=\sqrt{\frac{2x-4}{4x-x^2}}$,

On désigne par Cf sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$*.*

1)a- Etudier les variations de f.

b- Montrer que f est une bijection de]0,4[sur IR.

c- Soit g la bijection réciproque de f. Montrer que pour tout x∈ IR $g(x)=2+\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

2) Montrer que l'équation f(x)=x admet dans]0,4[une solution unique $\alpha > 2$.

3)a- Déterminer une équation de la tangente Δ à Cf au point d'abscisse 2.

b- Etudier la position de Cf par rapport à Δ .

c- Tracer Cf, et Δ et la courbe C' représentant g.

4) On considère la suite (U_n *) définie par :* $\begin{cases} U_0=\alpha \\ U_{n+1}=g(U_n) \end{cases}$

a- Démontrer que pour tout n∈ $\mathbb{N}$ *; Un* $\leq \alpha$.

b- Déterminer graphiquement le signe de g(x)-x

c- En déduire le sens de variation de (U_n).

d- Montrer que la suite (U_n) admet une limite l que l'on précisera.

<u>Exercice n°4:</u>

On considère la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{\sin(2x)}}{\sin(x)}$

1) Montrer que f est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0,\frac{\pi}{2}[$

2) Etudier la dérivabilité de f à gauche en $\frac{\pi}{2}$

3) Montrer que f réalise une bijection de $]0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[0,+\infty[$

4) Montrer que f^{-1} *est dérivable sur* $[0,+\infty[$ *et que* pour $x \in [0,+\infty[$ $\quad f^{-1}(x) = \frac{-4x}{4+x^4}$

5) Pour tout x> 0, on pose g(x)=$f^{-1}\left(\sqrt{2x}\right) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

a- Calculer $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$

b- Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ *et calculer g'(x).*

c- Montrer que pour $x \in [0,+\infty[$ *, g(x)=* $\frac{\pi}{2}$.