

**Algèbre1.                    Contrôle 2. Durée 1 h 20.**

**Exercice 1**

**(6 pts)**

Résoudre les équations suivantes :

1.  $Q^2 = X^3 P^4$ , d'inconnues  $P, Q \in K[X]$ .
2.  $P(X^4) = X^2 P(X^3)$ , d'inconnue  $P \in K[X]$ .
3.  $(P^n)^2 = 6.P'$ , d'inconnue  $P \in K[X]$ .

**Exercice 2**

**(4 pts)**

Considérons le polynôme  $P(X) = X^{n+2} - 2X^{n+1} + X^n - X^2 + 2X - 1$ ,  $\forall n \geq 3$ .

Montrer que 1 est une racine triple de  $P(X)$ ,  $\forall n \geq 3$ .

**Exercice 3**

Décomposer en éléments simple dans  $\mathbb{R}(X)$  les fractions suivantes :

1.  $\frac{(X+1)(2X-3)}{(X-2)(X-1)^2}$
2.  $\frac{X^2+1}{X^4+X^2+1}$
3.  $\frac{X^8+X^4+1}{(X^2+X+1)^3}$

**Exercice supplémentaire**

Soient  $k, n \in \mathbb{N}^*$  et  $r$  le reste de la division euclidienne de  $k$  par  $n$ . Montrer que  $X^r$  est le reste de la division euclidienne de  $X^k$  par  $(X^n - 1)$ .

**N.B.** 1 point pour la présentation.