M. Ayari Ali

série d'exercices suites réelles

Bac Science

Exercice n°1 :

Soit n ≥ 1 , on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots \dots + x - 1$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans [0 ;1]
2) a) Vérifier que $f_{n+1}(a_n) \geq 0$
   b) Etudier alors la monotonie de la suite (a_n).
   c) En déduire que la suite (a_n) est convergente.
3) a) Montrer que pour tout n ; $a_n - \frac{1}{2} = \frac{a_n^{n+1}}{2}$
   b) En déduire la limite de la suite (a_n).(on pourra vérifier que $(a_n \leq 0{,}7\ pour\ n \geq 2)$

Exercice n°2 :

Soit la suite u définie par : $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 U_n \end{cases}$

1) a) Montrer que U est décroissante pour n>2.
   b) Prouver que U est convergente et que $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.
2) $V_n = \frac{U_n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que V est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$.
3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $S_n = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^n (n^2 + 4n + 6)$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice n°3 :

Soit la suite réelle U définie par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{2U^2{}_n - U_n + 8}{U^2{}_n + 3} \end{cases}$

1) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.
2) Vérifier que $U_{n+1} - 2 = \frac{2 - U_n}{U^2{}_n + 3}$.
3) Soit n un entier quelconque. Montrer que si $U_n > 2 \Rightarrow\ U_{n+1} < 2\ et\ U_{n+2} > 2$.
4) Prouver, alors que U n'est pas monotone.
5) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \neq 2$
6) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|U_n - 2|$.
7) Démontrer alors que U converge vers 2.
8) On considère la suite $(S_n)_{\forall n \in \mathbb{N},}$ définie par :$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

a) Prouver que $(S_n)_{\forall n\in\mathbb{N},}$est strictement croissante.

b) Montrer par l'absurde que $(S_n)_{\forall n\in\mathbb{N},}$ n'est pas majorée.

c) Préciser alors $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice n°4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$son tableau de variation est le suivant

X	$-\infty$		2		$+\infty$
f(x)	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1

1) Soit n un entier supérieure ou égal à 1. Montrer que f(x)=$-\frac{1}{n}$ admet deux solutions (a_n) *et* (b_n) appartiennent respectivement aux intervalles $]-\infty;2]$ *et* $[2;+\infty[$.
2) Déterminer les variations de (a_n) *et* (b_n).
3) Montrer que (a_n) est convergente et déterminer sa limite. Montrer que $((b_n)$ est convergente et déterminer sa limite . Conclure.

Exercice n°5 :

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN par :$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n-3}{u_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour toutentier naturel n, on a : $u_n \geq 3$

   b) Montrer que (u_n) est croissante.

   c) En déduire que (u_n)est convergente et calculer sa limite l.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(u_n - 3)$.

   b) En déduire , par réccurence , que pour tout entier n , on a : $u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

   c) Retrouver alors la limite l de (u_n)

Pause mathématique :

Fred Rémy et Paul sont trois enfants qui jouent ensemble dans la cour de récréation . Ils discutent des cartes à collectionner d'un ami à eux qui n'est pas présent

Fred a dit : « Je suis certain qu'il en a minimum 100 ! »

Rémy déclare : « Mais non ! il en a moins de 100 ! »

Paul dit : « ce qui est sûr , c'est qu'il en a au moins une ! »

Une seule de ces trois affirmations est vraie , sachant cela, combien de carte possède t-il ?