

## Chapitre 4

# Planification

### 1. Planification de projets

#### 1.1. Qu'est ce que la planification ?

La planification

- est la tâche la plus exigeante de la gestion de projet.
- est une tâche continue qui est exécutée durant tout le projet.
- consiste à identifier :
  - o les objectifs,
  - o les contraintes du projet,
  - o les tâches à effectuer pour réaliser les objectifs,
  - o les lots de travail et les responsabilités,
  - o les jalons (milestones),
  - o les livrables produits par le projet.

La planification est une activité itérative ; Le résultat de cette activité sera raffiné au fur et à mesure que les données se précisent.

Les outils utilisés :

- L'organigramme de tâches (WBS) : pour représenter la structuration du projet
- Les diagrammes de Gantt : pour visualiser les relations temporelles des tâches et du personnel
- La méthode de Potentiel et la méthode Pert : pour déterminer l'ordonnancement du projet (dépendances entre les tâches, chemin critique, marges).

#### 1.2. Les niveaux de planification

On distingue trois niveaux de planification :

- Planning Directeur : ce planning concerne les objectifs stratégiques et fonctionnels qui identifient les grandes étapes du projet. Il est élaboré par le maître d'ouvrage.
- Planning opérationnel général : il est constitué de tous les plannings détaillés du projet ; Il est élaboré par le chef de projet.
- Plannings opérationnels détaillés : Plannings détaillant les tâches, en fonction des différentes phases et au niveau des différents lots de travaux. Ils sont élaborés par les chefs d'équipes de travail.

### 1.3. Démarche de planification

Au niveau opérationnel, la démarche de planification consiste à :

- Identifier les tâches et leur responsable
- Trouver la logique d'enchaînement
- Déterminer la durée des tâches
- Calculer les marges
- Calculer le chemin critique
- Déduire les dates clés
- Déduire la durée totale du projet
- Affecter les ressources

## 2. Tâches, Jalons et livrables

**Tâche:** action à mener pour aboutir à un résultat.

- Un objectif précis et mesurable
- Des ressources humaines, matérielles et financières adaptées
- Une charge de travail exprimée en nombre de journées-homme
- Une durée ainsi qu'une date de début et une date de fin
- Dans un planning, les tâches sont reliées par des relations de dépendance

**Les jalons**

- Des événements clé d'un projet, montrant une progression du projet
- Des dates importantes de réalisation d'un projet
- Une réalisation concrète (production de livrables)
- Dans le cadre du planning, les jalons limitent le début et la fin de chaque phase et servent de point de synchronisation

**Les livrables**

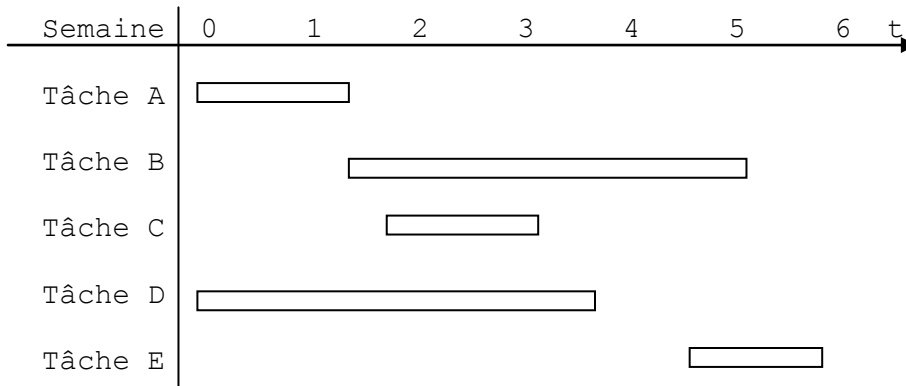
- Les livrables sont les produits des jalons (étapes clés), par exemple : cahier de charges, prototype, spécification d'architecture, code source
- il n'est pas toujours nécessaire de fournir des livrables aux étapes clés
- Les livrables doivent évoluer pendant que le projet progresse

## 3. Les diagrammes de Gantt

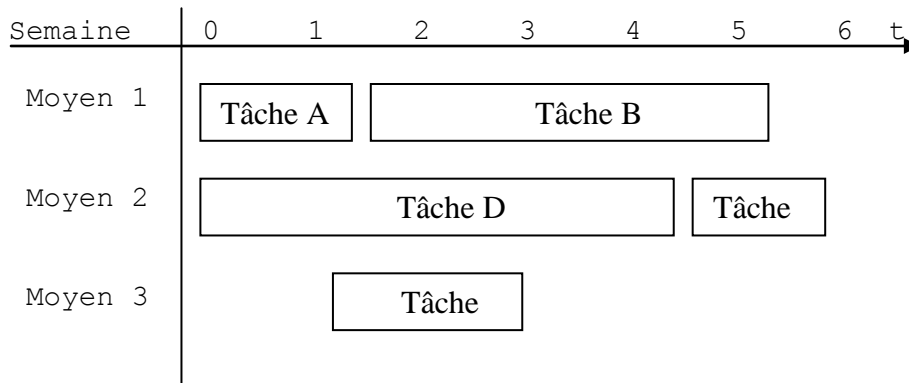
Les diagrammes de Gantt visualisent les relations temporelles de chaque tâche :

- l'axe horizontal représente le temps (l'écoulement du temps depuis le début du projet)
- l'axe vertical représente
  - les tâches à exécuter
  - ou les moyens de production
  - ou les ressources humaines
- les tâches sont représentées par des barres horizontales
  - visualise le début et la fin de chaque tâche
- optionnel: les jalons (étapes clés) sont visualisées par des losanges

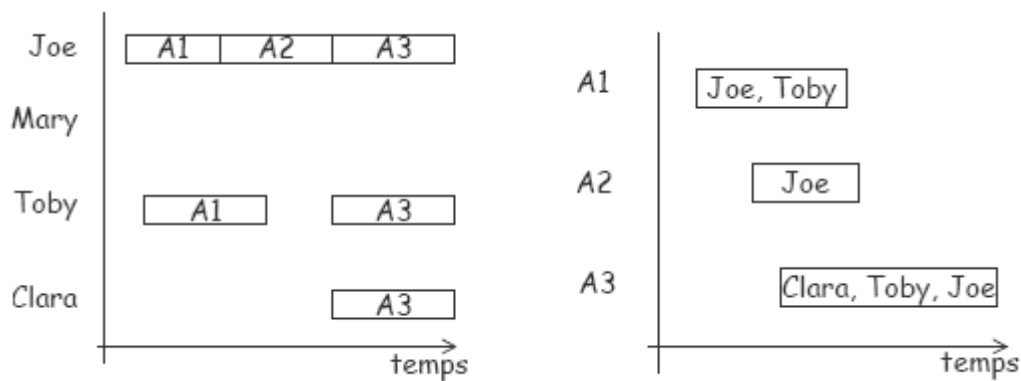
Exemples de diagrammes de Gantt :



Ordre d'exécution des tâches dans le temps

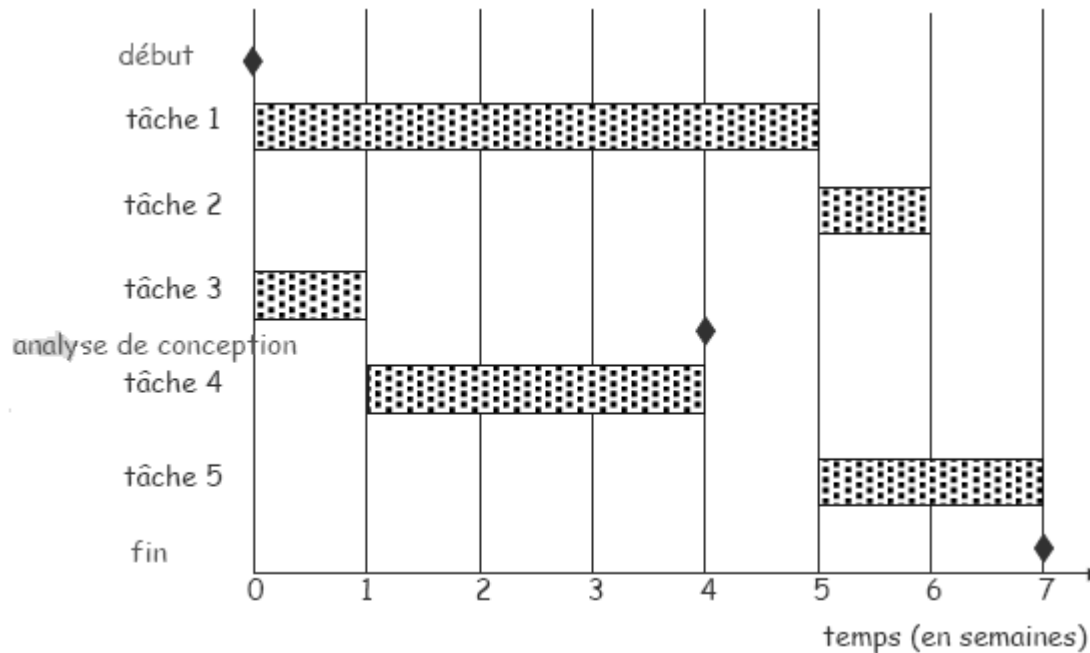


Affectation des tâches aux moyens de production



Les tâches assignées à chaque personne

Les personnes travaillant ensemble sur les mêmes tâches



## 4. Ordonnancement

### 4.1. Introduction

Lors de tout projet (Développement d'une application informatique, construction d'un bateau, d'un avion, d'un bâtiment,...), un problème décisif qui se pose est celui du calendrier d'exécution des tâches. Le problème est de déterminer dans quel ordre doivent s'enchaîner les diverses tâches de manière à minimiser le temps total d'exécution du projet.

Prenons **un exemple**. On veut construire un nouveau bâtiment de manière à pouvoir d'emménager au plus tôt. Certaines tâches ne peuvent s'exécuter qu'après que d'autres soient terminées. Par exemple, on ne peut commencer les fondations que lorsque le terrassement est fini. D'autres tâches peuvent s'exécuter simultanément. Par exemple, les travaux d'électricité et de plomberie peuvent être menés de pair. Les données sont reprises au tableau 1 pour cet exemple.

No	tâche	durée (jours)	préalables
1	terrassement	5	-
2	fondations	4	1
3	colonnes porteuses	2	2
4	charpente toiture	2	3
5	couverture	3	4
6	maçonnerie	5	3
7	plomberie, électricité	3	2
8	coulage dalle béton	3	7
9	chauffage	4	8 et 6
10	plâtre	10	9 et 5
11	finitions	5	10

Tableau 1: Construction d'un bâtiment

On doit tenir compte, dans les problèmes d'ordonnancement, de divers types de contraintes :

- Les **contraintes de localisation temporelle** expriment la localisation d'une tâche dans le temps : une tâche ne peut commencer avant une telle date ou après une telle date.
- Les **contraintes de succession temporelle** expriment les relations d'antériorité entre les tâches : une telle tâche ne peut commencer avant la fin d'une autre.
- Les **contraintes cumulatives** imposent la prise en compte de la disponibilité de **ressources non stockables**, par exemple des heures de travail en personnel ou d'équipement dont on peut disposer au cours d'une période et qui sont perdues si elles ne sont pas utilisées durant cette période.
- Les **contraintes disjonctives** expriment le fait que deux tâches ne peuvent avoir lieu en même temps sans que l'on puisse dire laquelle doit être effectuée avant l'autre.

Le problème d'ordonnancement *avec des contraintes de localisation temporelle et de succession temporelle seulement*, est appelé **problème central d'ordonnancement**.

Il s'agit donc de déterminer le calendrier de début de chacune des tâches de manière à terminer le chantier au plus vite en respectant les contraintes temporelles.

Il existe deux méthodes de résolution pour ce problème:

- La **méthode du potentiel** développée en France dans les années 60 et qui associe à chaque tâche un nœud du réseau, tandis que les relations d'antériorité sont représentées par des arcs entre les tâches.
- La **méthode PERT** développée parallèlement aux Etats Unis et qui, elle, associe chaque tâche à un arc du réseau, et chaque relation d'antériorité à un nœud.

Algorithmiquement, les deux méthodes de résolution sont équivalentes, mais la méthode du potentiel permet d'écrire le graphe de réseau de manière systématique (sans ajouter d'arc fictif).

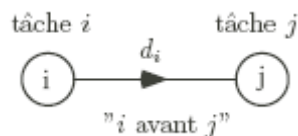


Figure 1: Graphe de la méthode des potentiels.

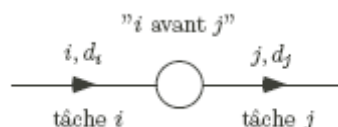


Figure 2: Graphe de la méthode PERT.

## 4.2. Formulation du problème

Les données :  $n$  tâches à exécuter, indicées  $i = 1, \dots, n$ .

et  $d_i$  pour désigner la durée d'exécution de la tâche  $i$ .

Les **variables** du problème sont les suivantes :  $t_i$  note le temps de *début d'exécution* de la tâche  $i$ ,  $t_f$  note le temps de fin de projet et  $t_0$  note la date de début de projet que l'on fixe à  $t_0 = 0$ .

**L'objectif** est de minimiser le temps de réalisation du projet :

$$\min z = t_f - t_0$$

Les **contraintes** du problème sont de trois types :

- Les contraintes de **localisation temporelle** expriment que la tâche  $i$  ne peut commencer avant le début de projet :

$$t_i \geq t_0, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (C.1)$$

- Les contraintes de **succession temporelle** expriment que la tâche  $j$  ne peut débuter avant que toute tâche  $i$  préalable à  $j$  ne soit finie :

$$t_i + d_i \leq t_j, \forall \text{ tâche } i \text{ antérieure à la tâche } j \quad (C.2)$$

- Les contraintes de **fin de projet** expriment que toute tâche  $i$  doit être finie avant la fin de projet :

$$t_i + d_i \leq t_f, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (C.3)$$

Remarquez que vu la présence des contraintes de succession temporelle (C.2), il suffit d'écrire (C.1) pour toute tâche n'ayant pas de prédécesseur et (C.3) pour toute tâche n'ayant pas de successeur.

## 4.3. Représentation graphique du problème

### 4.3.1. Graphe de la méthode du potentiel

Les **sommets** du graphe représentent les diverses tâches. On ajoute un nœud 0 qui correspond à la date de début de projet et un nœud  $f = n + 1$  qui correspond à la fin de projet. Les **arcs** représentent les diverses contraintes qui peuvent toutes se mettre sous la forme suivante :

$$t_i + d_i \leq t_j$$

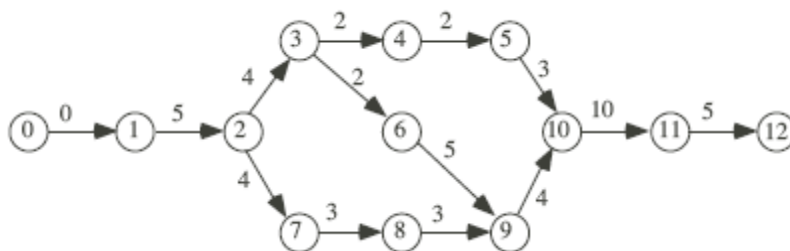


Figure 3: graphe associé au problème d'ordonnancement

- 1. On relie d'abord toutes les tâches sans préalable (la tâche 1 dans le cas de l'exemple) au nœud 0, début de projet par un arc de longueur nulle. (C.1)

- 2. Ensuite, on prend une tâche déjà dans le graphe et on examine si elle précède d'autres. Par exemple, la tâche 1 doit précéder la tâche 2. On doit donc avoir :  $t_1 + d_1 \leq t_2$ .  
On trace le nœud 2 et on relie le nœud 1 au nœud 2 par un arc de longueur  $d_1$ . On fait de même pour représenter toutes les contraintes de type (C.2).
- 3. Pour les seules tâches sans successeur, on les relie au nœud fin de projet, avec un arc de longueur égale à la durée de la tâche. (C.3).

#### 4.3.2. Représentation des autres types de contraintes

En plus des contraintes C1, C2 et C3, il y a d'autres types de contraintes :

1. Supposons d'abord que la tâche 3 ne puisse commencer avant 10 :  $t_3 \geq t_0 + 10$ . Ceci se représente en joignant les nœuds 0 et 3 par un arc de longueur 10.
2. Ensuite, supposons que la tâche 5 doive être commencée avant 40 :  $t_5 \leq 40$ , c'est à dire  $t_0 \geq t_5 - 40$ . Ceci se représente en joignant les nœuds 5 et 0 par un arc de "longueur" -40.
3. Enfin, supposons que la tâche 9 doive commencer au plus tard 5 jours après le début de la tâche 8 :  $t_9 \leq t_8 + 5$ . Ceci se représente en joignant les nœuds 9 et 8 par un arc de "longueur" -5.

#### 4.3.3. Condition d'existence d'une solution

Les contraintes temporelles peuvent être incompatibles entres-elles. Ceci va conduire à une impossibilité.

Supposons que nous avons la situation suivante :

La tâche 1, qui dure  $d_1$  jours, doit être terminée avant que la tâche 2 ne commence.

La tâche 2, qui dure  $d_2$  jours, doit être terminée avant que la tâche 3 ne commence.

La tâche 3, qui dure  $d_3$  jours, doit être terminée avant que la tâche 1 ne commence.

Cette situation est représentée à la figure 4. On voit ici que le graphe contient un circuit dont la somme des longueurs des arcs est positive.

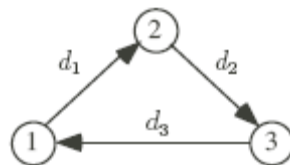


Figure 4: Circuit de longueur positive.

Ecrivons les contraintes correspondantes :

$$t_1 + d_1 \leq t_2$$

$$t_2 + d_2 \leq t_3$$

$$t_3 + d_3 \leq t_1$$

En sommant et en simplifiant, on obtient la condition suivante :

$$d_1 + d_2 + d_3 \leq 0$$

On peut montrer le résultat suivant.

**Lemme 1** Les contraintes temporelles sont compatibles entre elles si et seulement si le graphe associé ne comporte aucun circuit de longueur (somme des longueurs des arcs le constituant) strictement positive.

Remarquez qu'un cycle avec une somme des longueurs négative ne pose pas de problème.

#### 4.4. Calcul de l'ordonnancement

##### 4.4.1. Ordonnancement au plus tôt

L'ordonnancement au plus tôt détermine les dates de début au plus tôt des différentes tâches, notées  $t_i$ , en partant du nœud de début de projet.

Par exemple : La tâche 1 peut commencer au plus tôt en 0 puisqu'elle est reliée au nœud 0, début de projet, par un arc de longueur nulle. La tâche 2 peut commencer dès la fin de la tâche 1, c'est-à-dire  $t_2 = t_1 + d_1 = 5$  et ainsi de suite, on marque  $t_3 = 9$ ,  $t_4 = 11$ ,  $t_5 = 13$ , ...

Lorsqu'un sommet (comme le sommet 9) a plus d'un prédécesseur (8 et 6), on détermine la date au plus tôt par un maximum :

$$t_9 = \max \{t_6 + d_6, t_8 + d_8\} = 16.$$

On arrive ainsi à déterminer la durée totale minimum qui est ici de 35 jours (voir figure 5 où le temps de début au plus tôt est indiqué au dessus des nœuds).

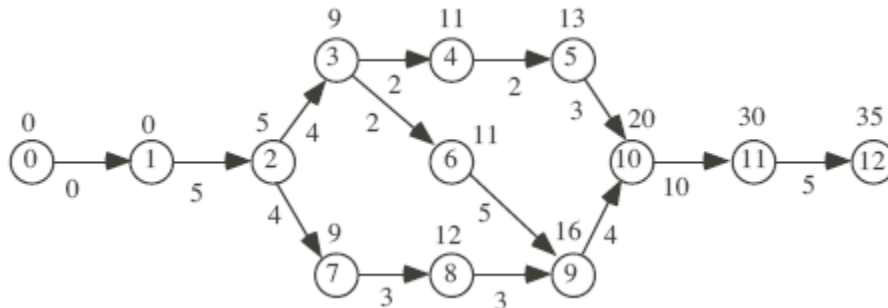


Figure 5: Ordonnancement au plus tôt.

##### 4.4.2. Ordonnancement au plus tard

Si on peut retarder la date de début d'une tâche à un certain point sans conséquence sur la date de fin de projet, alors ce point correspond à **la date de début au plus tard** de cette tâche

Par exemple : si on retarde le début de la tâche 5 (couverture), cela n'aura pas de conséquences, car ce n'est pas à partir de ce nœud que son successeur (10) a été marqué mais bien à partir du nœud 9. En effet,  $t_5 = 13$ ,  $t_{10} = 20$ , et  $d_5 = 3$ . Autrement dit, la date de début de la tâche 5 peut être retardée jusqu'à la valeur :

$$t_{10} - d_5 = 20 - 3 = 17$$

sans retarder la date de début de la tâche 10. On dit que 17 est la date de début au plus tard de la tâche 5.



On peut calculer l'**ordonnancement au plus tard** de la manière suivante (voir figure 6). Partant du nœud fin, pour lequel la date de début au plus tard coïncide avec la date de début au plus tôt  $t_{12} = 35$ , on retranche à la date au plus tard la durée de la dernière tâche. On détermine ainsi la date de fin au plus tard de la tâche 11 :

$$t_{11} = t_{12} - d_{11} = 35 - 5 = 30.$$

On marque ensuite les nœuds 10, 5, ...

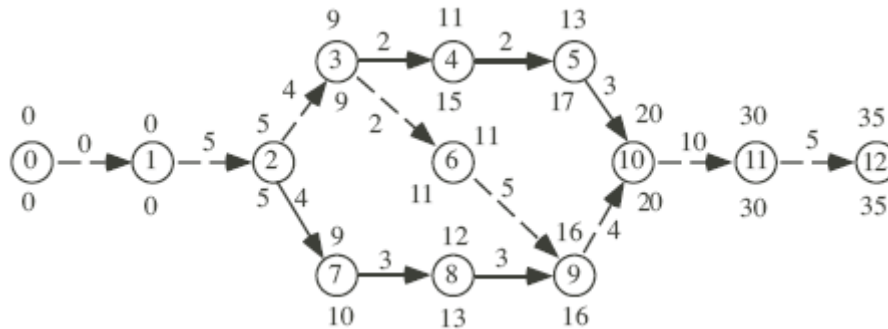


Figure 6 : Ordonnancement au plus tard.

Lorsqu'un nœud a plusieurs successeurs, on ne peut marquer ce sommet que si *tous ses successeurs directs sont marqués*. Prenons, à titre d'illustration, le cas du nœud 3. Dans ce cas, il faut prendre le minimum :

$$t_3 = \min\{t_4 - d_3, t_6 - d_3\} = \min\{15 - 2, 11 - 2\} = 9$$

## 4.5. Chemin critique et calcul des marges

### 4.5.1. Notion de tâche critique

On a deux sortes de tâches :

- Les **tâches critiques** sont celles qui servent à marquer de proche en proche le sommet  $n + 1$  à partir du sommet 0. Elles forment ce que l'on appelle le **chemin critique** qui donne l'ensemble des tâches à surveiller en premier si l'on veut respecter le délai minimum de réalisation du projet. Le **chemin critique** peut être déterminé de la manière suivante : Partant du nœud  $n+1$ , on ne retient, que les sommets correspondant à des tâches critiques jusqu'à joindre le nœud 1. Il s'agit, dans l'exemple, des nœuds 12,11,10,9,6,3,2,1 et 0.

Notez qu'il peut y avoir **plusieurs chemins critiques**.

- Pour toutes les autres tâches, c'est-à-dire les **tâches non critiques**, on peut déterminer la **marge d'une tâche** comme la différence entre son temps de début au plus tard et au plus tôt :

$$\text{Marge de tâche } i = m_i = \text{débutTard } i - \text{débutTôt } i$$

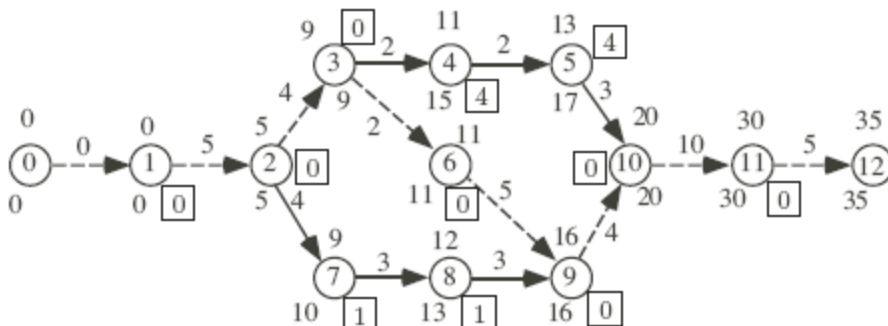


Figure 7: Calcul des marges

et donc la marge  $mi$  est strictement positive pour les tâches non critiques tandis qu'elle est nulle pour les tâches critiques.

$i$	4	5	7	8
$mi$	4	4	1	1

#### 4.5.2 Notion de marge libre d'une tâche

La **marge totale** d'une tâche est la différence entre sa date de début au plus tard et sa date de début au plus tôt ; mais la marge réellement disponible dépend de la *programmation effective des prédécesseurs de la tâche*.

Prenons l'exemple de la tâche 5 qui a une marge de 4. Si son prédécesseur direct, la tâche 4 est programmée au plus tard, c'est-à-dire en 15, la date de début au plus tôt de la tâche 5 devient 17 et donc sa marge devient nulle. Dès qu'on utilise la marge de la tâche 4, elle réduit donc celle de la tâche 5.

Par contre si on utilise la marge de la tâche 5 en la programmant au plus tard (en 17) cela ne réduit pas la marge des autres tâches du projet. On peut donc utiliser librement cette marge de 4 unités de la tâche 5.

**Définition** On définit la **marge libre** comme la partie de la marge totale que l'on peut utiliser sans affecter la marge des successeurs.

Si l'on considère que les *ancêtres et les descendants de la tâche sont programmés au plus tôt*, on définit ainsi la **marge libre** comme la différence entre :

- La date de début au plus tôt du descendant (ou la plus avancée de ces dates si la tâche a plusieurs descendants);
- La date de fin au plus tôt de la tâche.

$$ML_i = \min(\text{débutTôt } j) - \text{finTôt } i ; j \text{ est une tâche successeur de tâche } i$$

L'application à notre exemple donne les marges libres suivantes :

Tâche	4	5	7	8
Marge libre	0	4	0	1

## 4.6. L'ordonnancement par la méthode PERT

### 4.6.1. Présentation

Le graphe de la méthode PERT est souvent plus difficile à construire que celui de la méthode du potentiel car on peut être amené à introduire des arcs fictifs qui ne correspondent à aucune tâche.

Dans la méthode PERT, chaque tâche est associée à un arc du graphe. La longueur de l'arc correspond à la durée de la tâche en question. Les sommets sont utilisés pour traduire les relations de succession temporelle. Ainsi, si la tâche  $j$  doit suivre la tâche  $i$ , l'extrémité terminale de l'arc représentant la tâche  $i$  coïncidera avec l'extrémité initiale de l'arc représentant la tâche  $j$ .

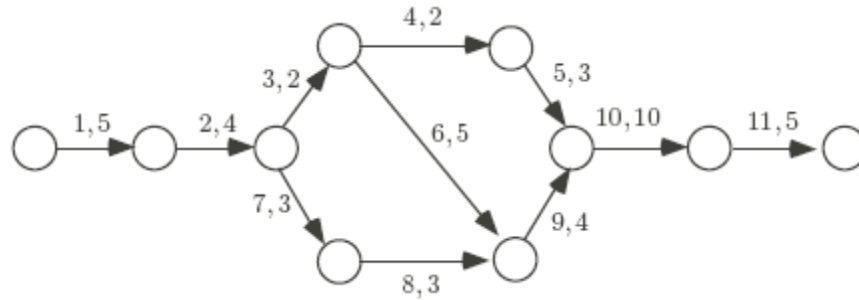


Figure 8: Graphe associé pour la méthode PERT.

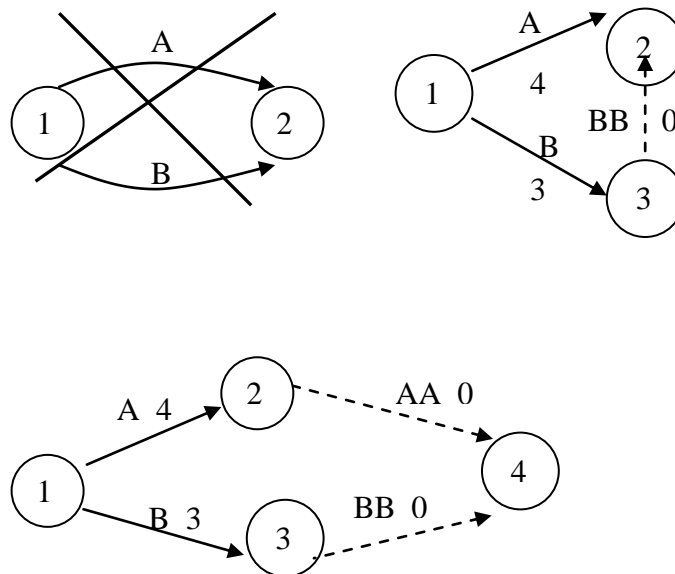
On note, à côté de chaque arc, le numéro correspondant à la tâche et la durée de la tâche.

Si, sur cet exemple, le graphe de la méthode du potentiel et celui de la méthode PERT, sont très proches, il n'en va pas toujours de même.

#### 4.6.2. Arcs fictifs

La construction du graphe PERT pose divers problèmes qui amènent à ajouter des arcs fictifs qui ne correspondent à aucune tâche.

Deux tâches ne peuvent être identifiées par 2 arcs ayant la même origine et la même extrémité. Ainsi si 2 tâches sont **simultanées** (même prédécesseur(s) et même successeur(s)), elles seront représentées par 2 arcs différents en partant de la même origine; pour représenter l'origine de successeur(s), on doit utiliser un ou deux arcs fictifs suivant le cas s'il y a un ou plusieurs successeurs :



**Exemple** : supposons que la tâche 1 précède les tâches 2 et 3 et que la tâche 4 précède la tâche 3. On pourrait tracer le graphe de la figure 9.

tâche	prédécesseur
1	–
2	1
3	1, 4
4	–

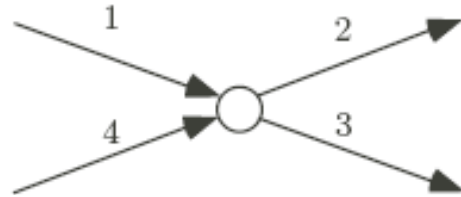


Figure 9 : Introduction d'une contrainte.

Mais ce graphe introduit une contrainte supplémentaire qui dit que la tâche 4 doit précéder la tâche 2. Pour résoudre la difficulté, il faut ajouter un arc fictif de longueur nulle entre l'extrémité de la tâche 1 et le début de la tâche 3. Ceci est illustré à la figure 10.

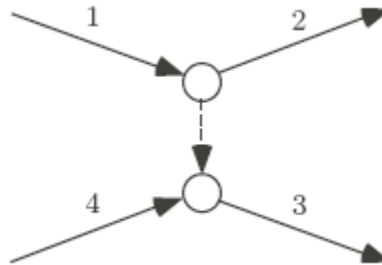


Figure 10: Arc fictif.

#### 4.6.3. Calcul de l'ordonnement

**a) Dates de début au plus tôt des nœuds.** Ceci est fait par marquage des nœuds à partir de l'origine comme dans la méthode du potentiel. On additionne au temps du nœud précédent le temps de la tâche. En cas de plusieurs prédécesseurs, on prend le maximum.

débutTôt du premier nœud = 0

débutTôt  $j$  = Max (débutTôt  $i$  + durée  $i,j$ ) ;  $i$  un nœud prédécesseur de nœud  $j$ .

**b) Dates au de début au plus tard des nœuds**

On initialise la date au plus tard du dernier nœud avec sa date au plus tôt.

Pour les autres nœuds :

débutTard  $i$  = Min (débutTard  $j$  - durée  $i,j$ ) ;  $j$  un nœud successeur de nœud  $i$ .

**c) Marge totale**

On calcule la marge de la tâche  $(i, j)$  entre les nœuds  $i$  et  $j$  comme :

$M_{i,j}$  = débutTard  $j$  - (débutTôt  $i$  + durée  $i,j$ )

#### d) Dates au de début au plus tard des tâches

Les dates au plus tard aux nœuds ne correspondent pas toujours aux dates au plus tard des tâches situées après les nœuds. Ainsi la date au plus tard 9 est la date au plus tard de la tâche 3 mais pas de la tâche 7, pourtant les deux tâches sont situées à droite du même nœud.

Alors la date début au plus tard d'une tâche sera déterminée par l'addition de la date début au plus tard du nœud de départ et la marge de la tâche.

$\text{débutTard } i,j = \text{débutTard } i + M_{i,j}$  ;  $i$  est le nœud de départ de la tâche  $i,j$  ;  $j$  est le nœud de fin de cette tâche.

Les résultats sont indiqués au tableau ci-dessous.

Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Date au plus tôt	0	5	9	11	13	11	9	12	16	20	30
Marge	0	0	0	4	4	0	1	1	0	0	0
Date au plus tard	0	5	9	15	17	11	10	13	16	20	30

#### e) Marge libre

On calcule la marge libre de la tâche  $(i, j)$  entre les nœuds  $i$  et  $j$  comme :

$$ML_{i,j} = \text{débutTôt } j - (\text{débutTôt } i + \text{durée } i,j)$$

#### f) Chemin critique

Un chemin critique peut alors se construire à partir du nœud de fin en ne retenant que les arcs critiques. L'application à l'exemple donne l'ordonnancement illustré à la figure 11.

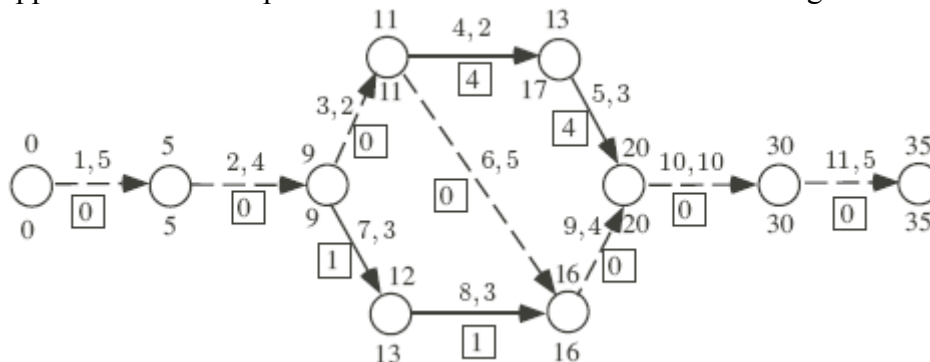


Figure 11: Ordonnancement par la méthode PERT.

### 4.7. Prise en compte des contraintes disjonctives

**Contraintes disjonctives** : Deux tâches ne peuvent avoir lieu en même temps sans que l'on puisse dire, a priori, laquelle doit être effectuée avant l'autre. C'est le cas lorsque l'on partage une même ressource entre plusieurs tâches.

Considérons les tâches  $i$  et  $j$ , dont on note  $t_i$  et  $t_j$ , leurs dates respectives de début d'exécution. On peut écrire la relation d'exclusion sous la forme :

$$\begin{aligned} t_i + d_i &\leq t_j \text{ si } i \text{ est réalisée avant } j \\ t_j + d_j &\leq t_i \text{ si } j \text{ est réalisée avant } i \end{aligned} \quad (C4)$$

Si on n'a qu'une seule contrainte disjonctive, on peut évidemment résoudre deux problèmes d'ordonnement : un où l'on impose que  $i$  soit réalisée avant  $j$ , l'autre où l'on impose que  $j$  soit réalisée avant  $i$ . Ensuite, on prend le temps d'exécution le plus court. Mais cette méthode devient impraticable lorsque le nombre de contraintes disjonctives croît.

En effet, pour chaque disjonction entre les tâches  $i$  et  $j$ , on introduit la variable binaire  $x_{ij}$  qui vaut 1 si la tâche  $i$  est réalisée avant la tâche  $j$  et 0 si la tâche  $j$  est réalisée avant la tâche  $i$ . On va alors remplacer (C4) par les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} ti + di &\leq tj + M(1 - x_{ij}) \\ tj + dj &\leq ti + Mx_{ij} \end{aligned} \quad (C5)$$

avec  $M$  une borne supérieure sur la date de fin des travaux.

Vérifions que ce système avec la contrainte supplémentaire que  $x_{ij}$  est binaire (0/1) exprime exactement la disjonction. Considérons d'abord le cas  $x_{ij} = 1$ . Le système (C 5) devient :

$$\begin{aligned} ti + di &\leq tj \\ tj + dj &\leq ti + M \end{aligned}$$

La première inéquation exprime bien que la tâche  $i$  doit être finie avant que ne débute la tâche  $j$ . La seconde est toujours vérifiée, vu la définition de  $M$ .

Considérons maintenant le cas  $x_{ij} = 0$ . Le système (C5) devient :

$$\begin{aligned} ti + di &\leq tj + M ; \\ tj + dj &\leq ti \end{aligned}$$

La première inéquation toujours vérifiée, vu la définition de  $M$ . La seconde exprime bien que la tâche  $j$  doit être finie avant que ne débute la tâche  $i$ .

#### 4.8. Contraintes cumulatives

L'introduction de contraintes cumulatives (et disjonctives) est à peu près inévitable dans la résolution de problèmes réels de gestion de projets. Il existe deux méthodes (*disponibles dans les logiciels de planification*) permettant de tenir compte de ces contraintes:

- Le lissage
- Le nivellement

Les deux méthodes peuvent aboutir à une modification de l'ordonnement du projet avec la différence que le lissage modifie l'ordonnement sans changer la date fin du projet, tandis que le nivellement peut impliquer un changement de cette date :

##### - Le lissage

Modifier l'ordonnement sans changer la date de fin du projet en :

- utilisant les marges libres puis les marges totales
- affectant plus de ressources

##### - Le nivellement

Modifier l'ordonnement en changeant la date de fin du projet :

- on résout tous les problèmes de sur-affectation des ressources en ne dépassant pas leur disponibilité
- on agit sur les tâches critiques

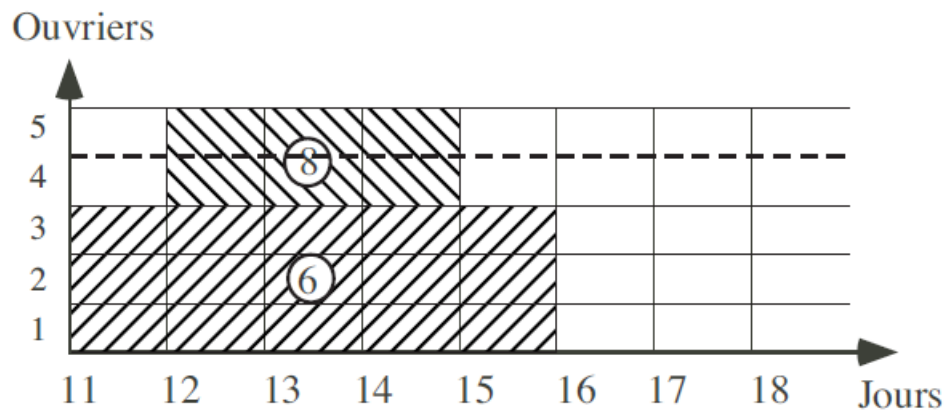
Les logiciels de planification appliquent ces deux méthodes de manières différentes à cause de l'existence de plusieurs possibilités de gestion de ressources.

### Exemple

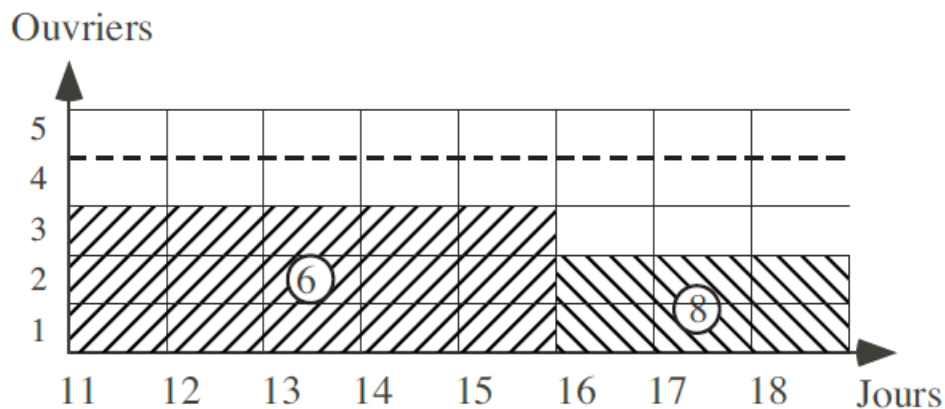
Supposons que la société ne dispose que de 4 ouvriers pour effectuer les tâches 6 (durée 5 jours) et 8 (durée 3 jours) qui requièrent respectivement la présence de 3 ouvriers pour 6 et de 2 ouvriers pour 8. Rappelons que les deux tâches sont des prédécesseurs de la tâche critique 9 (début 16) et que la tâche 6 est critique et est programmée actuellement de 11 à 16 tandis que la tâche 8 n'est pas critique et sa programmation au plus tôt va de 12 en 15.

Les solutions possibles :

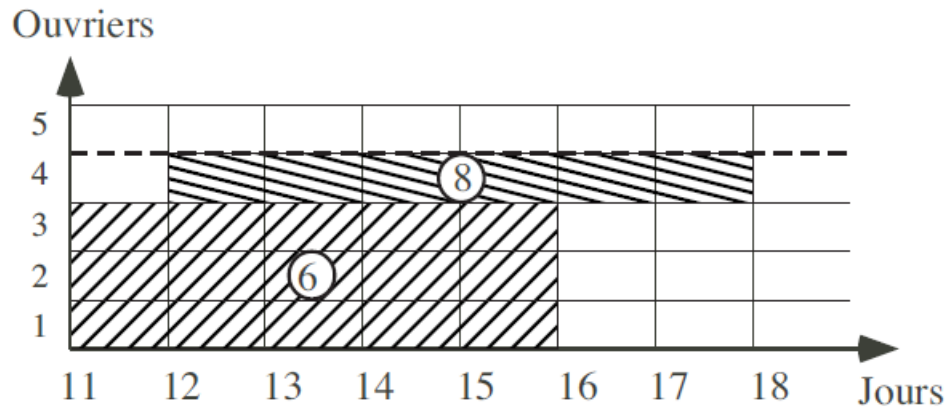
- La première solution consiste à *relâcher la contrainte en affectant des ressources supplémentaires*. Le projet reste effectué en 35 jours.



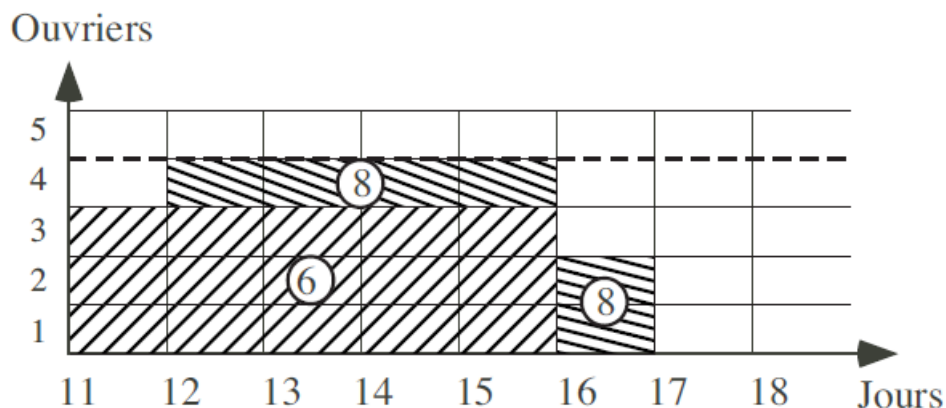
- La deuxième solution consiste à *programmer prioritairement les tâches critiques* en considérant que le nombre d'ouvriers est fixé. Dans ce cas, la tâche non critique 8 est programmée aux jours 16 à 18, elle devient critique et le projet prend 3 jours de retard.



- La troisième solution consiste à *partager de manière fixe les ressources entre les tâches*, par exemple en affectant 3 ouvriers à la tâche 6 (75 % de la ressource) et un ouvrier à la tâche 8 (25 % de la ressource). La programmation reste celle du premier cas, mais la tâche 8 ne bénéficiant que d'un seul ouvrier prendra 6 jours à la place de 3. Dans ce cas, la tâche non critique 8 est programmée du 12 au 17<sup>ème</sup> jour, elle devient critique et le projet prend 2 jours de retard.



- La quatrième solution consiste à *considérer la quantité de travail par tâche*. Par exemple, pour la tâche 8, il faut 6 jours-ouvriers de travail. On affecte en priorité les ressources à la tâche critique et on regarde ce qui reste pour la tâche non critique. Durant les jours 12 à 15, on dispose d'un ouvrier, ensuite, durant le jour 16, on utilise 2 ouvriers. Dans ce cas, la tâche non critique 8 est programmée du 12 au 17<sup>ème</sup> jour, elle devient critique et le projet prend 1 jour de retard.





#### 4.9. Liaisons entre les tâches

Nous avons pris comme hypothèse pour tous les calculs précédents que les liaisons entre les tâches étaient du type fin-début (fd) à délai nul, mais en réalité, on peut avoir une liaison fin-début avec un délai non nul, de même on peut avoir d'autres sortes de liaisons : début-début (dd), début-fin (df), et fin-fin (ff).

**Liaison fin-début (fd):** Appelée aussi liaison directe, elle relie l'événement de fin de la tâche précédente A à l'événement de début de la suivante B.

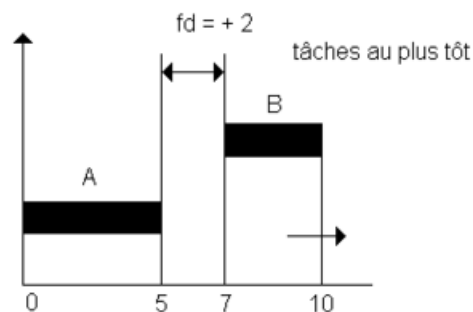
**Liaison début-début (dd):** Appelée aussi liaison initiale, elle relie l'événement de début de la tâche précédente A à l'événement de début de la suivante B.

**Liaison début-fin (df):** Appelée aussi liaison inverse, elle relie l'événement de début de la tâche précédente A à l'événement de fin de la suivante B.

**Liaison fin-fin (ff):** Appelée également liaison finale, elle relie l'événement de fin de la tâche précédente A à l'événement de fin de la suivante B.

##### Liaison fin-début avec délai positif

Considérons une liaison fin-début de deux tâches A (durée = 5 et date début au plus tôt = 0) et B (précédée par A, durée = 3) avec un délai fd=2 (fd le délai entre la fin de A et le début de B).



$$\text{DébutTôt (B)} = \text{FinTôt(A)} + \text{fd} = 5 + 2 = 7$$

$$\text{MargeLibre (A)} = \text{DébutTôt (B)} - \text{fd} - \text{FinTôt(A)} = 7 - 2 - 5 = 0$$

Si on considère que la date de début au plus tard de B est 8, alors:

$$\text{FinTard (A)} = \text{DébutTard (B)} - \text{fd} = 8 - 2 = 6$$

#### 4.10. Recouvrement (Chevauchement)

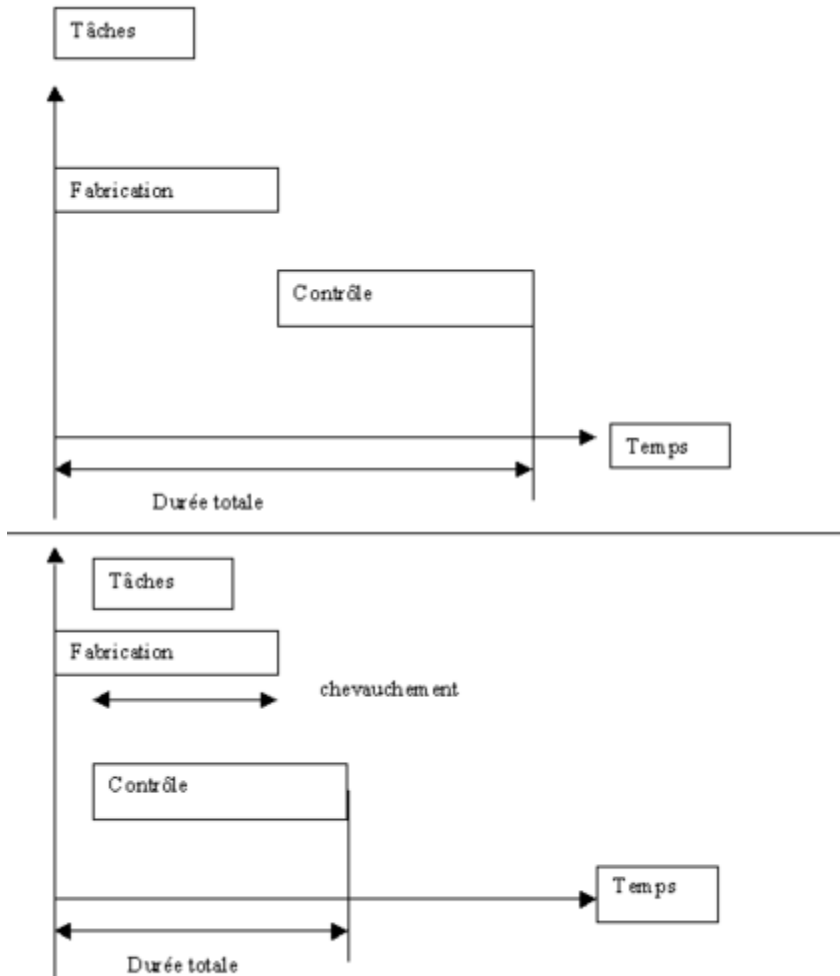
Il existe plusieurs raisons pour lesquelles les tâches dans un projet peuvent ne pas se suivre directement c'est à dire que la tâche postérieure débute dès que la tâche antérieure est terminée.

Il peut par exemple exister des contraintes spécifiques pour certaines tâches, par exemple dans la construction d'une maison il faut attendre que le béton coulé dans une dalle soit sec avant de poser le carrelage ou que la première couche de peinture soit sèche avant de passer la deuxième.

D'autres " contraintes " peuvent apparaître si l'on veut par exemple diminuer la durée d'un projet.

Pour diminuer la durée d'un projet une solution peut être qu'il existe un chevauchement ou un recouvrement des tâches.

Par exemple si l'on réalise une fabrication puis un contrôle afin de diminuer la durée de l'ensemble des deux tâches on peut très bien décider de commencer le contrôle avant la fin de la fabrication.



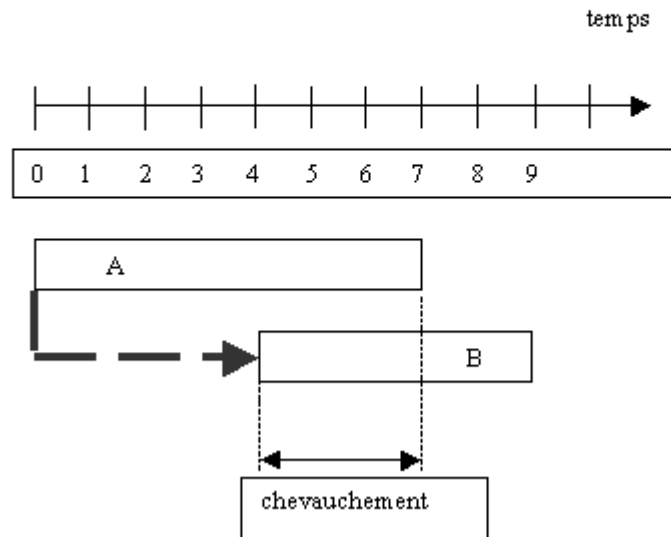
Le recouvrement ou le chevauchement de tâches peut se représenter grâce à quatre sortes de liaisons : fin-début (fd) début-début (dd) fin-début (fd) début-fin (df) et fin-fin (ff).

- Pour exprimer un chevauchement entre A et B avec une liaison FD, on lui attribue un délai négatif  $x$ , qui signifie que B peut commencer  $x$  unités de temps avant la date de fin de A.
- Le délai attribué à la liaison DD indique le temps minimum qui doit s'écouler entre les dates de début de A et de B.
- Le délai affecté à la liaison DF exprime le temps minimum qui doit s'écouler entre la date de début de A et la date de fin de B
- Le délai d'une liaison FF mentionne le temps minimum à respecter entre les dates de fin de A et de B.

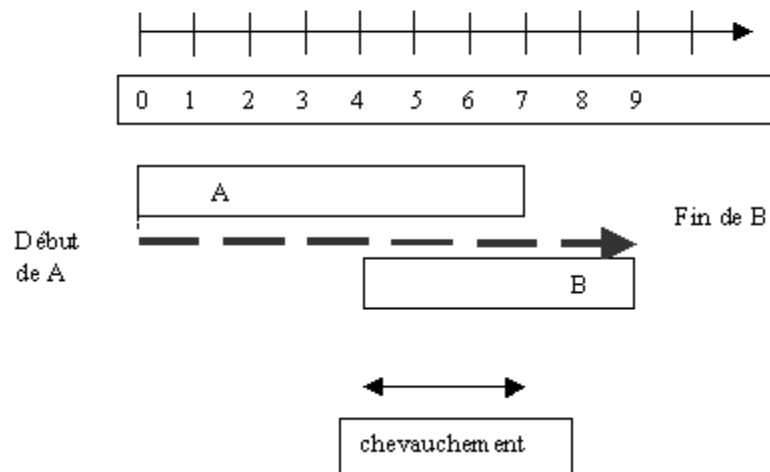
Afin de comprendre le fonctionnement de chaque type de liaison nous allons les utiliser sur un exemple de recouvrement identique avec deux tâches A et B.

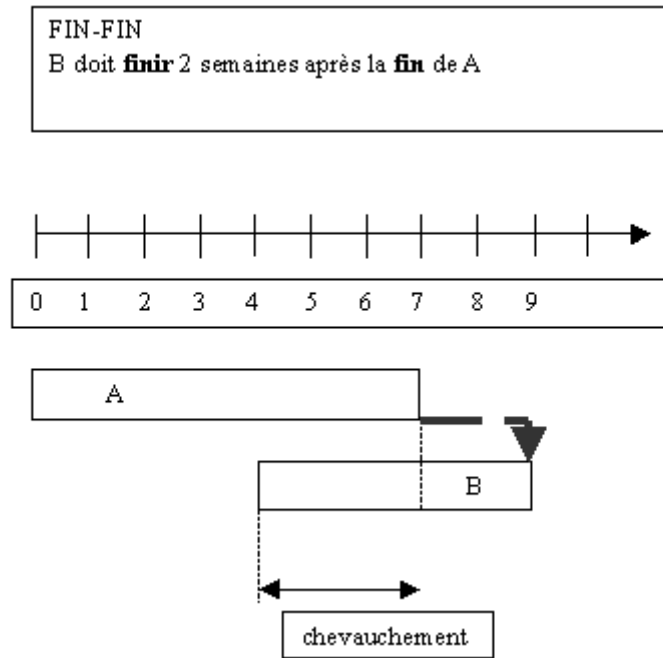
	A	B
Durée	7	5
Début	0	4
Fin	7	9

DEBUT-DEBUT  
B peut **débuter** 4 semaines après le **début** de A.



DEBUT FIN  
B doit **finir** 9 semaines après le **début** de A.





La grande partie de ce document est un extrait du cours :

Gestion de Projets – Daniel De Wolf

<http://compta-excellent.be/MATHEMATIQUES/AUTRES%20MATH/GP.pdf>

Autres sites :

[http://www.cetice.u-psud.fr/aunege/gestiondeprojet/co/Module\\_gestion\\_projet\\_2.html](http://www.cetice.u-psud.fr/aunege/gestiondeprojet/co/Module_gestion_projet_2.html)

## Exercices

**Exercice 1.** Soit un projet qui comporte les tâches suivantes dont la durée est exprimée en trimestres.

No	tâche	durée	préalables
A	Commande d'une piste	6	-
B	Construction d'un port provisoire	3	-
C	Commande de matériel portuaire	2	-
D	Pose d'une voie ferrée	4	B
E	Construction d'une cité administrative	7	B
F	Construction du port définitif	2	B
G	Construction de l'installation minière	4	A, D
H	Equiperment portuaire définitif	3	C et F

- a) Construire le graphe relatif à la méthode du potentiel.
- b) Calculer les dates de début au plus tôt et de début au plus tard. Déterminer le chemin critique.
- c) Comment modifier le graphe si, on veut que la tâche 7 ne commence pas avant 8 trimestres ? Recalculez les dates de début au plus tôt, les dates de début au plus tard.
- d) Comment modifier le graphe si on veut en plus que la tâche 8 ne commence pas après 4 trimestres ? Dites si le problème reste soluble.

**Exercice 2.** Construction d'un bâtiment. Considérons les différentes tâches à effectuer pour construire un bâtiment. Elles sont reprises ci-dessous.

No	tâche	durée	préalables
1	fondations	6	-
2	murs	10	1
3	Plomberie intérieure	5	2
4	électricité	7	2
5	toit	6	2
6	Plomberie extérieure	4	5
7	menuiserie	8	3et4
8	sols	4	7
9	Peinture intérieure	5	7
10	Finitions intérieures	6	8et9
11	Peinture extérieure	9	6
12	Finitions extérieures	2	11

- a. Tracez le graphe relatif à la méthode de potentiel.
- b. Calculez les dates de début au plus tôt, les marges et déterminez le(s) chemin(s) critique(s).
- c. Les tâches 9 (peinture intérieure) et 11 (peinture extérieure) doivent être disjointes car effectuées par les mêmes ouvriers. Comment résoudre cette disjonction ? La date de fin des travaux est-elle affectée ?

**Exercice 3.** Construction d'un entrepôt :

Tâches	durée en jours	prédécesseurs
A - acceptation des plans	4	
B - préparation du terrain	2	
C - commande de matériaux	1	A
D - creusage des fondations	1	A, B
E - commande des portes et fenêtres	2	A
F - livraison des matériaux	2	C
G - coulage des fondations	2	D, F
H - livraison des portes et fenêtres	10	E
I - pose des murs et du toit	4	G
J - montage portes et fenêtres	1	H, I

a) – Représenter le projet par un graphe de Potentiel. Tracer un tableau qui indique pour chaque tâche : La date de début au plus tôt, la date de début au plus tard et la marge. Déterminer le chemin critique.

b)- Les ressources humaines à utiliser sont :

– Soit : un architecte affecté à la tâche A, un terrassier affecté aux tâches B, D, G, un personnel service achat affecté aux tâches C, E, F, H un charpentier affecté aux tâches I et J.

– Soit : un architecte affecté à la tâche A, un terrassier1 affecté aux tâches B, D, G, un terrassier2 affecté aux tâches B, D, G, un terrassier3 affecté aux tâches D et G, un personnel service achat1 affecté aux tâches C et H, un personnel service achat2 affecté à la tâche E, et un autre achat3 affecté à la tâche F, deux charpentiers 1 et 2 affectés aux tâches I et J.

Etudier les deux cas à l'aide de diagrammes de Gantt. Indiquer pour chaque cas si le nombre de ressources humaines est suffisant pour réaliser le projet sans retard ou s'il est pas nécessaire d'affecter toutes ces ressources ; Quelle est la conséquence d'utiliser ce nombre de ressources ? Quelle est la solution optimale ?

**Exercice 4.** Développement d'une plate-forme de formation à distance :

tâches	Durée (mois)	Tâches préalables
A : Analyse globale	4	
B : Analyse détaillée	6	A
C : Programmation composante 1	4	B
D : Programmation composante 2	4	B
E : Programmation composante 3	6	B
F : Intégration	3	C, D, E
G : Expérimentation/évaluation	8	F
H : Travaux de mise au point	4	G
I : Recette	1	H

1) Tracer le diagramme PERT du projet. Déterminer le chemin critique

2) On suppose que l'on affecte au projet deux analystes-programmeurs, Jo et Zette, à plein temps. Proposer un diagramme de Gantt.

**Exercice 5.** Un projet consistant à réorganiser trois services (S1, S2, S3) d'une entreprise. Les tâches identifiées (14 tâches) du projet sont :

- Une étude préalable de chacun des services (EP1, EP2, EP3),
- Une tâche d'analyse complémentaire (AN) concernant S1 et S2,
- La ré-organisation de chacun des services (RO1, RO2, RO3),
- La tâche de nouveau modèle d'organisation de chacun des services (NF1, NF2, NF3),
- Une mesure de performance d'organisation des trois services (PERF),
- Un ajustement de chacun des services (AJ1, AJ2, AJ3).

Les contraintes sont :

- Les tâches de ré-organisation succèdent aux études préalables dans chacun des services. Les durées des tâches sont EP1 : 4, EP2 : 6, EP3 : 8, RO1 : 8, RO2 : 12, RO3 : 12.
- La tâche AN, d'une durée de 2, doit être terminée avant le début de RO1 et RO2,
- Après les ré-organisations, suivent les tâches de nouveau modèle d'organisation (NF1, NF2, NF3). La mesure de performance PERF ainsi que NF1, NF2, NF3 doivent commencer en même temps. Leurs durées sont NF1 : 10, NF2 : 7, NF3 : 10, PERF : 11.
- Les ajustements AJ1, AJ2, AJ3 commencent quand les tâches NF1, NF2, NF3 et PERF sont terminées. Leurs durées sont : AJ1 : 3, AJ2 : 4, AJ3 : 5.

**Question :** Tracer le graphe Pert de ce projet. Déterminez la date de début au plus tôt, la date de début au plus tard de chacune des tâches. Déterminez le(s) chemin(s) critique(s).

**Exercice 6.** L'informatisation de deux services (S1, S2) d'une entreprise peut se décomposer en douze tâches, classifiées en trois catégories :

- Analyse et Conception : Cette catégorie regroupe les tâches suivantes : A, B, C, D, E, F.
- Programmation : Cette catégorie regroupe les tâches suivantes : G, H.
- Documentation : Cette catégorie regroupe les tâches suivantes : I, J, K, L.

Les tâches de ce projet sont reliées entre elles par des conditions d'antériorité exprimées dans le tableau ci-dessous :

Description Tâche	Code Tâche	Prédécesseurs	Durée
Analyse du système de S1	A		5
Analyse du système de S2	B		2
Analyse de Conditions de réalisation de système de S1	C	A	2
Conception du système de S1	D	A	3
Conception du système de S2	E	B	3
Détermination de relations entre S1 et S2	F	D, E	2
Programmation du système de S1	G	C, F	6
Programmation du système de S2	H	F	4
Documentation de système S1	I	D	2
Documentation de système S2	J	E	2
Unification de documentations de S1 et S2	K	I, J	1
Manuel d'utilisation de systèmes de S1 et S2	L	G, H	1

1. Représenter le projet par un diagramme de PERT. Tracer un tableau pour représenter les dates de début et de fin pour les tâches. Déterminer le chemin critique.

2. La direction du projet a pris la décision d'affecter des ressources humaines au projet de la façon suivante : un analyste1 affecté aux tâches A, C, D, un analyste2 affecté aux tâches B, E, F, un programmeur1 à la tâche G, un programmeur2 à la tâche H, un personnel de documentation1 aux tâches I, J, K, un personnel de documentation2 à la tâche L.

- A l'aide de diagrammes de Gantt, faire une étude détaillée de cette décision et préciser sa conséquence.
- Pour chacun des cas suivants, proposer une affectation optimale et la représenter par un diagramme de Gantt :
  - Une ressource ne peut être affectée aux tâches de deux catégories différentes.
  - Une ressource peut être affectée aux tâches de plus qu'une catégorie.

**Exercice 7.** Le premier tableau représente les tâches d'un projet avec leurs relations d'antériorité. Le deuxième tableau donne la liste des personnes (ressources) qui seront disponibles pendant la période de projet. Il précise pour chaque ressource, le nombre maximum de jours que cette ressource peut consacrer au projet, et le coût par jour de cette ressource.

Tâche	Durée (en jours)	Tâches antérieures
A	2	-
B	3	A
C	1	B
D	2	B
E	4	B
F	8	C, D
G	8	C, D
H	3	E, F, G
I	1	J, H
J	6	E, F, G
K	6	J, H
L	6	J, H

Tableau 1

ressource	nb. de jours disponibles	coût/jour
R1	21	40 \$
R2	18	40 \$
R3	6	60 \$
R4	10	100 \$
R5	20	100 \$

Tableau 2

- Utiliser la méthode de potentiel pour tracer le graphe d'ordonnancement de ce projet.
- Déterminez la date de début au plus tôt, la date de début au plus tard. Déterminez le(s) chemin(s) critique(s) de ce projet.
- Etablir un diagramme Gantt représentant l'affectation des tâches aux ressources disponibles d'une façon de minimiser le coût du projet. Donner le coût du projet ainsi planifié.
- Une analyse approfondie du projet a permis de spécifier les contraintes suivantes :
  - L'ensemble de tâches D,G,J et l'ensemble de tâches D,F,J représentent deux gammes alternatives.
  - Les tâches antérieures de J sont reliées par la relation OU.
  - La tâche J ne peut commencer avant le 15<sup>ème</sup> jour.
 Quelles sont les modifications qui peuvent être provoquées par l'application de ces contraintes ? Expliquer.



**Exercice 8.** On considère un projet constitué des tâches décrites dans le tableau suivant :

Tâche	Durée en semaines	Préalables	Autres contraintes	Ressources nécessaires
A	4	-		1
B	5	-		2
C	3	A		1
D	7	C	Ne peut être commencée avant la 10 <sup>ème</sup> semaine	2
E	4	B		1
F	5	C ou E		2
G	6	B		2
H	7	G	Recouvrement de 2 semaines de G	2
I	5	D	Doit être commencée avant la 20 <sup>ème</sup> semaine	2
J	6	F, G, H		2

- Tracez le graphe correspondant à la méthode du potentiel.
- Est-ce que la contrainte « la tâche I doit être commencée avant la 20<sup>ème</sup> semaine » implique une incompatibilité avec les autres contraintes ? Expliquer.
- Calculez les dates de début au plus tôt, au plus tard, les marges totales de tâches et déduire le(s) chemin(s) critique(s).
- Qu'est ce qu'une marge libre d'une tâche ? Déterminer les marges libres de tâches non critiques de ce projet.
- Tracer un diagramme de Gantt pour vérifier si 4 ressources sont suffisantes pour réaliser le projet sans retard. Dans le négatif et si le coût minimum est la seule contrainte à considérer, quelle technique de solution doit-on choisir : Lissage ou Nivellement ? Expliquer. (le coût d'une semaine de retard est 1000\$, le coût d'une ressource par semaine est 450\$).