Exercice n°1 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{8} \\ U_{n+1} = (2-U_n)U_n \end{cases}$

On note f la fonction définie sur [0,2] $f(x) = (2-x)x$

On a représenté en annexe la fonction f et la droite d'équation y=x

1) Sans effectuer de calcul, construire les points sur l'axe (Ox) ayant pour abscisses respectives U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 *et* U_5*, On laissera apparents les traits de constructions*

2) a) Montrer que pour tout x de]0,1[$0 < f(x) < 1$

b) Démontrer que pour tout entier naturel $U_n \in [0,1]$

3) a) Etudier le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) En déduire la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *puis déterminer sa limite*

Exercice n°2 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{4}{4-U_n} \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $U_n < 2$

b) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} - U_n = .\frac{(U_n-2)^2}{4-U_n}$

c) En déduire que la suite U_n *est croissante sur* $\mathbb{N}$ *.*

d) Montrer que la suite U_n *est convergente et déterminer sa limite l .*

2) On considère la suite (V_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $V_{n+1} = .\frac{1}{U_n-2}$

a) Montrer que la suite (V_n) *est arithmétique de raison r=*$-\frac{1}{2}$*; préciser son premier terme* V_0

b) Exprimer V_n *en fonction n puis* U_n *en fonction n .*

Exercice n°3 :

Soit (U_n) *la suite réelle définie sur IN par :* $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{U_n+1} \end{cases}$

1) a – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *; on a* $1 \leq U_n \leq 2$*.*
b – Montrer que la suite (U_n) *est croissante.*
c – En déduire que la suite (U_n) *est convergente et calculer sa limite .*
2) a – Vérifier que : $2 - U_{n+1} = \frac{1}{U_n+1}(2-U_n)$
b – En déduire que : $2 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2-U_n)$
c – Montrer par récurrence que : $2 - U_n \leq (\frac{1}{2})^n(2-U_0)$
d- Retrouver alors $\lim_{n\to+\infty} U_n$

.**Exercice n°4 :**

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $U_{n+1}=\frac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}$.

1) Calculer U_1 et U_2.
2) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$
   b) Montrer que (U_n) est suite croissante.
   c) En déduire que U_n est convergente et calculer sa limite .

3) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{U_n^2}{3-U_n^2}$

   a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique, calculer sa raison et son premier terme .

   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

   c) Retrouver alors la limite de (U_n)

Exercice n°5 :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $U_{n+1}=\frac{1,5U_n-0,5}{U_n}$.

1) a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $U_n \geq 1$
   b) Montrer que (U_n) est une suite décroissante.
   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{U_n-1}{U_n-0,5}$.

   a) Montrer que V_n est une suite géométrique ;calculer sa raison et son premier terme

   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

   c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).