Problème n°1 :

A. *Soit f la fonction définie sur [-1,1[par :* $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}$

1) *Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 ; Interpréter graphiquement les résultats .*

2) *a) Etudier la dérivabilité de f sur]-1,1[et calculer* $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Montrer que f réalise une bijection de [-1,1[sur $\mathbb{R}_+$*;Déterminer* $f^{-1}(x)$

3) *a) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe* $\mathscr{C}_f$ *au point A(0,1)*

b) Vérifier que pour tout x de [-1,1[$f(x)-(x+1)=\frac{x^2f(x)}{1+\sqrt{1-x^2}}$

c) En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ *%(T) ;Construire* $\mathscr{C}_f$ *de f et* $\mathscr{C}'$ *de* f^{-1}

B. *Soit la fonction φ définie sur]0,+∞[par :* $\varphi(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

1) *a) Dresser le tableau de variation de φ*

b) Montrer que l'équation $\varphi(x)=x$ *admet dans*]0,+∞[*une unique solution* $\alpha\in]1,2[$ *2)*

Soit U la suite réelle définie sur IN par $\begin{cases} U_0>3 \\ U_{n+1}=\varphi(U_n)\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $x\geq 1$*on a* $|\varphi'(x)|\leq\frac{1}{2}$ *.*

b) En déduire que $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$.

c) Montrer que U_n *est convergente et calculer sa limite*

C. *Soit g la fonction définie sur* $[0,\frac{\pi}{4}[$ par : $\begin{cases} g(0)=1 \\ g(x)=\varphi[(\frac{1-tgx}{tgx})^2]si\ x\neq 0\end{cases}$

1) *Montrer que pour tout x de* $[0,\frac{\pi}{4}[$ on a $g(x)=\frac{1}{1-tgx}$

2) *Montrer que g réalise une bijection de* $[0,\frac{\pi}{4}[$ sur un intervalle J à préciser

3) *Montrer que* g^{-1}*dérivable sur J puis calculer* $(g^{-1}(x))'$

Problème n°2 :

Le plan P est orienté dans un le sens direct

On considère un triangle ABC rectangle en C , Inscrit dans un cercle (C) de c entre O et tel que :

$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

On désigne par I le milieu de [BC], D le symétrique de C par rapport à (AB) et E le symétrique de O par rapport à I.

1) *Montrer que [DE]est un diamètre de (C)*
2) *Soient* $\varphi=S_{(BC)}oS_{(AB)}$ *et* $\psi=S_{(ED)}oS_{(AD)}$
   a) *Caractériser chacune des isométries* φ *et* ψ *et* $\psi o \varphi^{-1}$
   b) *Déterminer l'image de la droite (BD) par* φ
   c) *Soit M un point du plan n'appartenant pas à la droite (BD)*

      On pose $M' = \varphi(M)$ *et* $M'' = \psi(M)$
      i. *Montrer que BM'CM'' est un parallélogramme*
      ii. *Ou faut-il placer M pour que BM'CM'' soit un losange ?*
3) *On se propose de déterminer les isométries f de P qui verifient : f(E)=A et f(C)=D*
   a) *Soient g l'isométrie telle que :* $f = t_{\overrightarrow{EA}}\ o\ g$*.Montrer que* $g=R_{(E,\frac{-2\pi}{3})}$ *ou* $g=S_{(ED)}$
   b) *On suppose que* $g=R_{(E,\frac{-2\pi}{3})}$

      Déterminer les droites Δ *et* Δ' *tels que :* $R_{(E,\frac{-2\pi}{3})}=S_{(EB)}oS_{\Delta}$ *et* $t_{\overrightarrow{EA}} = S_{\Delta'}oS_{(EB)}$
   c) *Caractériser alors f.*

Problème n°3 :

I)Soit un réel $\theta \in]0,\pi[$.

1) *Résoudre dans l'équation (E):* $z^2-(3+e^{2i\theta})z+2(1+e^{2i\theta})=0$.
2) *Soit dans l'équation (E'):*$z^3-(4+e^{2i\theta})z^2+(5+3e^{2i\theta})z-2(1+e^{2i\theta})=0$.
   a) *Vérifier que 1 est une solution de (E').*
   b) *Résoudre alors l'équation (E').*

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, on considère les points A d'affixe 1, B d'affixe 2 et M d'affixe* $z=1+e^{2i\theta}$; $\theta \in]0,\pi[$.

1) *Ecrire z sous forme exponentielle.*
2) a) *Montrer que M appartient au cercle* $C_{(A,1)}$.
   b) *Déterminer l'ensemble* $E=\{M$ *tel que* θ *décrit* $]0,\pi[.\}$