MI IPE

TP3 : interpolation

PREMIERE PARTIE : COURS ET EXEMPLES

Thèmes abordés :
* Macros simples
* Ajustement et interpolation polynomiaux,
* Evaluation de la qualité d'une régression,
* Régression de puissance et exponentielle,
* Interpolation par spline

Remarque IMPORTANTE : dans ce TP, lorsqu'un exemple ou un exercice est donné, vous êtes invité fortement à le réaliser et à en noter le résultat.

I. Macros simples

A l'aide du menu « File », nous allons créer un fichier **exemple.m** et l'éditer. Ceci est un macro simple ou on déclarera deux vecteurs, afin de pouvoir les utiliser plus tard. Pour modifier le fichier exemple.m après l'avoir créer, nous pourrons utiliser la commande *edit*.

Dans le fichier, écrivez les lignes suivantes :

```
a) une première macro
% EXEMPLE est un macro simple où on déclare deux vecteurs
% que l'on appelle a et b

a = [3 2 4 5 3 1] ;
b = [2 7 9 10 12 14] ;
```

Dans le workspace, tapez :

```
b) utilisation de la première macro
>> exemple
>> who
>> help exemple
>> a, b, a.*b, a*b'
```

Pour la suite nous aurons besoin du macro **TP3_data.m** qui est prêt à l'usage sur vos PC. Afin de vérifier que le macro existe, et pour voir son contenu, utilisez la commende *edit*. NE PAS MODIFIER LE CONTENU DU FICHIER !!!

```
c) édition de la macro du TP
>> edit TP3_data
```

Ensuite, exécutez ce macro, qui contient des données qui seront nécessaire pour la suite du TP. Plusieurs vecteurs et matrices ont été déclarés.


```
d) execution de cette macro
>> TP3_data
>> who
>> help TP3_data
```

. Interpolation polynomiale

1. Introduction

Les techniques décrites dans ce TP sont employées pour obtenir des relations entre données expérimentales: c'est l'objet de la régression. Les économistes utilisent les régressions pour la prévision. En ingénierie, les régressions sont employées dans des applications qui vont au-delà de la simple interpolation. Par exemple, la forme générale de l'équation caractérise un certain processus peut être connu théoriquement, mais pas les valeurs des coefficients qui apparaissent dans l'équation. Des tests sont ensuite effectués pour ce processus, et les variables concernées sont mesurées. La courbe de la forme théorique attendue ajustée aux données expérimentales par régression, définissant ainsi les paramètres de la courbe. Les modèles «calibrés» par régression sont utilisés dans les calculs de conception et dans les simulations.

2. Ajustement et interpolation polynomiale

Dans ce TP, nous allons utiliser un tableau de mesures de la densité de l'eau en fonction de la température. Les vecteurs « temperature » et « densite » sont définis pour vous dans le macro TP3_data.m. Ils contiennent les valeurs suivantes :

Temp. °C	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Densité t/m^3	0.99987	0.99997	1.00000	0.99997	0.99988	0.99973	0.99953	0.99927	0.99897	0.99846

Temp. °C	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
Densité t/m^3	0.99805	0.99751	0.99705	0.99650	0.99664	0.99533	0.99472	0.99409	0.99333	0.99326

Vérifiez le contenu des deux vecteurs et tracer la densité en fonction de la température.

```
f) affichage des données
>> size(temperature), size(densite)
>> [temperature densite]
>> plot(temperature,densite)
```

En observant le graphe, nous pouvons déduire que la courbe pourrait être estimée comme une courbe du second degré. Il nous faut donc déterminer les trois coefficients c_1, c_2 et c_3 de l'équation suivante : $y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$

Cela peut être résolu en posant le problème comme un système d'équations où les inconnues sont c_1, c_2 et c_3. Sous forme matricielle, le système s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^2 & x_m & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

où $[x_1 \ldots x_m]$ sont la variable indépendante (ex : températures) et $[y_1 \ldots y_m]$ sont la variable dépendante (ex : densité). Ce système peut être résolu comme dans le TP précédent par une estimation aux moindres carrées.

Sous MATLAB, il existe une fonction qui génère la matrice A et les vecteurs puis la résoud pour Y. Les arguments de *polyfit* sont :

1. la variable indépendante ;
2. la variable dépendante ;
3. le degré de la courbe à ajuster.

```
g) interpolation de degré 2
>> format long
>> C2=polyfit(temperature,densite,2)
```

Une fois ces coefficients du polynôme connus, on peut estimer les valeurs de la courbe estimée :

```
h) estimation des valeurs
>> y2=polyval(C2,temperature)
```

Pour un degré 3 :

```
i) interpolation de degré 3
>> C3=polyfit(temperature,densite,3) ;
>> y3=polyval(C3,temperature)
>> plot(temperature,densite,’b’, temperature,y2,’r’,temperature,y3,’g’)
>> % agrandir une zone
>> xx=temperature(1 :10) ; yy=densite(1 :10) ;
>> yy2=y2(1 :10) ;
>> yy3=y3(1:10);
>> plot(xx,yy,’b’,xx,yy2,’r’,xx,yy3,’g’);
```

3. Evaluation de la qualité d’une régression

Pour voir laquelle des régressions est la meilleure, nous allons d’abord calculer et afficher les résidus :

```
j) calcul et affichage des résidus
>> resid2=densite-y2 ;
>> resid3=densite-y3 ;
>> figure(1)
>> plot(temperature,resid2,’k-‘, temperature,resid3,’r :’);
```



```
>> grid
>> legend(‘residual 2’, ‘residual 3’);
>> xlabel(‘temperature’);
>> figure(2)
>> % on peut aussi les afficher selon la variable dépendante
>> plot(densite,resid2,densite,resid3)
>> grid
>> text(densite(20),resid2(20),’residual 2’)
>> text(densite(20),resid3(20),’residual 3’)
```

On peut aussi calculer la somme des erreurs au carré (SSE pour Sum of the Squarred Errors) afin d’apprécier la qualité de l’approximation :

```
k) somme des erreurs au carré
>> SSE2=sum(resid2.^2)
>> SSE3=sum(resid3.^2)
```

III. Régression de puissance

Les courbes polynomiales ne sont pas les seules courbes utilisées pour ajuster des données. Par exemple, certains phénomènes peuvent être modélisés par une fonction puissance :

$y = a\, x^b$

où a et b sont des constantes.

Cette équation caractérise généralement des processus croissant rapidement. Comme présenté dans l'exemple suivant, de tels cas peuvent se réduire à des régressions linéaires.

Ils peuvent être résolus en considérant la propriété des logarithmes naturels :

$\ln y = \ln a + b \ln x$

En posant $u=\ln x$ et $v=\ln y$, on se ramène à une régression d’ordre 1 : $v = \ln a + b\, u$

Exemple : Production d'une culture de sériole (poisson) à ceinture

Année	Tonnes	Année	Tonnes
1961	1900	1976	101600
1964	9500	1979	154900
1967	21200	1982	146300
1970	43300	1984	154500
1973	80300		

Un tableau « fish » avec ces valeurs a été défini pour vous dans le macro TP3_data.m. Affichez le contenu du tableau :

```
l) les données « fish »
>> size(fish)
>> fish
```

Nous allons maintenant utiliser les données de « fish » :

```
l-bis) utilisation de ces données
>> year = fish( :,1) ; mass=fish( :,2) ;
>> x=year-1960
>>loglog(x,mass) % affichage en échelle logarithmique
>> % on vérifie ainsi qu'une régression en puissance semble appropriée
>> u=log(x) ; v=log(mass) ;
>> c=polyfit(u,v,1)
>> a=exp(c(2))
>> b=c(1)
>> y=a*x.^b
```

Comparons la régression et les données :

```
l-ter) régression des données
>> [ mass y ] % comparaison des valeurs
>> plot(year, y, year, mass,'o')
>> title('Regression en puissance de la production de sériolle')
>> xlabel('année')
>> ylabel('tonnes')
```

Ajoutons en texte l'équation calculée :

```
l-quad) l'équation :
>> t =['tonnes=' num2str(a) 'x^b, b=' num2str(b) ]
>> text(year(4),y(4),t) ;
```

IV. Régression exponentielle

Nous voulons approximer des données par une loi exponentielle :

$y = a\, e^{bx}$

Elle peut être aussi réduite à une régression linéaire, en prenant le logarithme :

$\ln(y) = \ln(a) + b\, x$

Exemple : Données de turbots reproducteurs (poissons)

Taille cm	Poids g	Surface cm^2	Taille cm	Poids g	Surface cm^2
34.3	962.3	359.96	36.8	936.0	391.20
38.7	1264.5	448.13	40.0	1490.8	479.79
38.2	1005.5	415.07	40.8	1416.2	478.46
43.8	1879.0	556.30	39.5	1441.0	482.95
41.8	1638.0	518.70	36.3	1089.6	400.67

Un tableau turb = [taille, poids, surface] avec ces valeurs est défini dans le macro TP3_data.m. Affichez d'abord son contenu :

```
m) les données « turb »
>> size(turb)
>> turb
```

```
m-bis) approximation en puissance des données « turb »
>> taille=turb( :,1) ; mass=turb( :,2) ;
>> plot(taille,mass) ;
>> % tri
>> [ l i ]=sort(taille)
>> for j=1 :10, m(j)=mass(i(j)); end;
>> [l m] % attention erreur
>> size(l), size(m)
>> [l m']

>> % test de l'approximation en puissance
>> loglog(l,m)
>> u=log(l) ; v=log(m) ;
>> c=polyfit(u,v',1)
>> a=exp(c(2))
>> b=c(1)
>> mi = a*l.^b
>> plot(l,mi,l,m,'o')
>> resid = m – mi'; SSE1=sum(resid.^2)

>> % test de l'approximation en loi exponentielle
>> semilogy(l,m)
>> c=polyfit(l,v',1)
>> a=exp(c(2))
>> b=c(1)
>> mi = a*exp(b*l);
>> plot(l,mi,l,m,'o')
>> title('Approximation en une loi exponentielle')
>> xlabel('Taille des turbots, cm')
>> ylabel('Poids des turbots, g')
>> resid2=m-mi' ;
>> SSE2=sum(resid2.^2)
```

V. Interpolation par splines

Les splines consistent à approximer localement les données par des courbes locales. Il s'agit d'une interpolation qui passe par les données fournies.

Exemple : Reprenons les données sur la densité de l'eau en fonction de la température.

Avant de calculer les splines d'interpolation, nous effectuons une interpolation polynomiale qui a donné les meilleurs résultats précédemment :

```
n) splines : affichage des données
>> C3 = polyfit(temperature, densite, 3) ; y3 = polyval(C3, temperature) ;
```

Puis nous effectuons l'interpolation par spline :

```
n-bis) splines : l'usage
>> help spline
>> ys = spline(temperature, densite, temperature) ;
>> format long
>> [temperature y3 ys]

>> resid3 = densite – y3; resids= densite - ys;
>> plot(temperature, resid3, temperature, resids)
>> xlabel('Temperature, :x:')
>> ylabel('Residuals of interpolations')
>> text(x(2), resid3(2) , 'resid3')
>> text(x(4) , resids(4) , 'resids')

>> e3 = sqrt (sum(resid3.^2)
>> es = sqrt(sum(resids.^2)

>> xi=1 : 2 : 39; yi = spline(x, y, xi);
>> plot(temperature, densite, xi, yi, 'o')
>> title{'Interpolation de la densité de l'eau')
>> xlabel('Temperature de l eau, deg C')
>> ylabel('densité de l eau, t/m^3')

>> plot(x(1 :10),y(1 :10),xi(1 :10),yi(1 :10),'o')
```


DEUXIEME PARTIE : EXERCISES

Exercice 1 : culture de dorades roses au Japon

Le tableau ci-dessous contient des données sur la production de dorades roses au Japon. Estimez ces données par une fonction puissance et une courbe exponentielle. Comparez les résultats.

Année	Tonnes	Année	Tonnes
1964	100	1976	6400
1967	200	1979	12200
1970	500	1982	20200
1973	1300	1984	26100

Exercice 2 : étalonnage d'instrument

On utilise six valeurs standards pour étalonner un instrument. Le tableau suivant présente les valeurs affichées par l'instrument en fonction des valeurs standards (exactes). Effectuez une régression au premier degré sur ces données et utilisez les résultats pour tracer une courbe d'étalonnage.

Mesurée	Réelle
0.5030	0
0.7229	1.0000
0.7802	2.0000
1.2106	5.0000
1.7607	10.0000
2.4649	15.0000

Exercice 3 : viscosité de l'eau

Le tableau ci-dessous contient des données de viscosité cinématique d'eau fraîche entre O°C et 28°C. Déterminez la viscosité cinématique qui correspond à 0.5, 1.5,… 27.5 °C.
Les valeurs de la viscosité sont données dans le vecteur EX3 du macro TP3_data.m

Température °C	υ m2/s	Température °C	υ m2/s
0	1.79	15	1.14
1	1.73	16	1.11
2	1.67	17	1.08
3	1.62	18	1.06
4	1.57	19	1.03
5	1.52	20	1.01
6	1.47	21	0.983
7	1.43	22	0,960
8	1.39	23	0,938
9	1.33	24	0.917
10	1.31	25	0.896
11	1.27	26	0.876
12	1.24	27	0.857
13	1.20	28	0.839
14	1.17		

Exercice 4 : pression atmosphérique

Altitude m	Pression Moyenne mbar
0	1013
100	1001
200	989
300	977
400	965
500	959
600	942
700	932
800	921
900	902
1000	894

Le tableau ci-dessus contient des valeurs de pression d'une atmosphère « stable » pour des altitudes de 0 à 1000m au-dessus du niveau de la mer. Théoriquement, ces données suivent une loi exponentielle de la forme

$p = a\, e^{-kh}$

1. Réalisez une régression exponentielle sur ces données et trouvez les valeurs de a et de k
2. En utilisant les valeurs trouvées au (1), calculez les pressions qui correspondent aux altitudes 50, 150,250, . . . ,950 m. Tracez ces valeurs avec celles contenues dans le tableau
3. Extrapolez pour des altitudes de 1500, 2000 et 2500 m. Comparez vos valeurs avec celles indiquées par le US. Standard Atmosphere 1962, soit respectivement 843, 795 et 747 mbar.

Exercice 5 : échelle de température

Comme nous l'avons constaté dans le TP précédent, la courbe qui représente la relation entre les échelles Celsius et Fahrenheit passe par les points (0 32), (100 212). Utilisez une régression linéaire pour retrouver la formule :

$C = 5/9\ (F - 32)$

Ensuite, utilisez la fonction polyval pour obtenir la température en degrés Celsius qui correspond à 96.8 F (température du corps humain).

Exercice 6 : densité de courant dans un conducteur en cuivre

La résistance dans un conducteur de cuivre n'est pas constante. Le tableau ci-dessous contient les valeurs de courant supporté par un conducteur de section comprise entre $0.75mm^2$ et $500mm^2$. Utilisez ces données pour effectuer :
1. une régression du second degré;
2. une régression du troisième degré.
Comparez le résultat des deux régressions.

Section aire mm2	Courant alternatif A	Section aire mm2	Courant alternatif A
0.75	16	50	210
1	20	70	260
1.5	25	95	310
2.5	34	120	365
4	45	150	415
6	57	185	475
10	78	240	560
16	104	300	645
25	137	400	770
35	168	500	880

Exercice 7 : thermomètre à résistance en platine

Les valeurs sont données dans le tableau EX7 du macro TP3_data.m

Température °C	Résistance Ohms	Température °C	Résistance Ohms
0	100.00	170	164.76
10	103.90	180	168.46
20	107.79	190	172.16
30	111.67	200	175.84
40	115.54	210	179.51
50	119.40	220	183.17
60	123.24	230	186.32
70	127.07	240	190.45
80	130.89	250	194.07
90	134.70	260	197.69
100	138.50	270	201.29
110	142.29	280	204.88
120	146.06	290	208.45
130	149.82	300	212.02
140	153.58	310	215.57
150	157.31	320	219.12
160	161.04	330	222.65

Nous allons présenter une nouvelle façon de mesurer la température à partir de variations de résistance. En effet, la résistance d'un conducteur ou d'un semi-conductcur fluctue avec la température.
Le tableau ci-dessus contient les valeurs de résistance pour un thermomètre à résistance en platine dont les températures sont comprises entre 0 °C et 330 °C. Généralement, on mesure la résistance pour en déduire la température. Par conséquent:
1. Effectuez une régression au premier degré et déterminez les coefficients de l'équation qui permettent d'obtenir la température comme une fonction de la résistance;
2. Trouvez les températures qui correspondent aux résistances suivantes 125, 150, 175 et 200 ohms;
3. Tracez les valeurs obtenues ci-dessus sur le graphique qui affiche la température en fonction de la résistance;
4. Effectuez aussi une régression du second degré et assurez-vous que cela n'améliore pas les résultats de façon significative.
Indication: Considérez le coefficient du terme de la puissance la plus élevée.

Exercice 8 : un circuit varistance

Une varistance représente n'importe quel support à l'état solide avec deux terminaux traversés par un courant électrique I qui augmente considérablement plus vite qu'une tension V. La relation entre courant et tension peut être décrite par l'équation :

$I = a\ V^n$

où n prend généralement des valeurs comprises entre 3 et 35. Les varistances peuvent être considérées comme des résistances qui dépendent non linéairement de la tension. Elles sont particulièrement utilisées dans la protection des équipements contre les surtensions.

Supposons les valeurs suivantes mesurées pour un type de varistances.

Voltage,V	Courant, mA	Voltage,V	Courant, mA
0	0	30	3.5
12	0.5	35	5.7
18	1	40	8.8
25	2.3	45	12.9

(1) Tracez les courants mesurés en fonction des tensions mesurées;
(2) Effectuez une régression de puissance pour déterminer le a et le n de l'équation ci-dessus.
(3) Supposez qu'on applique une tension alternative d'amplitude 48 V et de fréquence 50Hz à la varistance. Tracez la tension et le courant, et évaluez à quel point la varistance déforme le courant.

Indication: Vous ne pouvez pas utiliser u.^n pour les valeurs négatives de u; utilisez sign(u).*abs (u) ou une réécriture de cette expression. Quand vous effectuez la régression, ne prenez pas en compte le premier couple de mesures, celui dont les valeurs sont nulles. Pourquoi ?

Exercice 9 : un circuit varistance

Lisez l'exercice précédent et considérez les valeurs suivantes :

Voltage,V	Courant,mA	Voltage,V	Courant,mA
0	0	150	0.65
50	0.03	200	1.5
80	0.11	250	3
100	0.2	300	5

(a) Tracez le courant mesuré en fonction de la tension mesurée ;
(b) Effectuez une régression exponentielle pour déterminer les termes a et n de l'équation de l'exercice précédent.
(c) Supposez qu'on applique une tension alternative d'amplitude 48 V et de fréquence 50Hz à la varistance. Tracez la tension et le courant, et observez à quel point la varistance déforme le courant.

Indication: Vous ne pouvez pas utiliser u.^n pour les valeurs négatives de u, utilisez sign(u).*abs(u) ou une réécriture de cette expression.