Mr :Khammour.K **Série :Etude de fonctions :** $4^{\text{éme}}$Sc-exp

Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_{\backslash\{-2,0\}}$ par $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$.

1°) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_{\backslash\{-2,0\}}$ et calculer f'(x).

3°) Donner le tableau des variations de f.

4°) Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 1cm.
On indiquera et on tracera les asymptotes éventuelles à la courbe.

5°) Démontrer que la courbe (C) a un axe de symétrie.

6°) Déterminer l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1.
Tracer T.

Exercice n°2 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x+1}$. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Quel est l'ensemble de définition D_f de f ? Etudiez alors les variations de f.

2) a) Déterminez les trois réels a, b et c tels que pour tout réel x dans D_f, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

b) En déduire que la droite D :y=x-5 est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

c) Etudiez la position relative de (D) par rapport à $\mathscr{C}_f$.

3) Calculer la limite de f en -1. Que peut-on en déduire?

4) Déterminez les points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

5) En prenant $-1+2\sqrt{2}$= 1,828 à 0,001 près et $-1-2\sqrt{2}$ = -3.828 à 0,001 près, tracez la courbe $\mathscr{C}_f$, les asymptotes de $\mathscr{C}_f$, ainsi que les tangentes horizontales de $\mathscr{C}_f$

Exercice n°3 :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle]0;+∞[par : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ où a, b et c sont des nombres réels.

On sait que :

- f est strictement croissante sur]0;2] , strictement décroissante sur [2;+ ∞ [,
- f(2)=-3 et f(1) = -4.

1) Formez le tableau de signes de f '(x) sur]0;+oo[. Quel est le signe de f(x) pour x > 0?

2) Exprimez f '(x) en fonction de a , b , c et x . Montrez alors que les réels a , b et c sont solutions du système $\begin{cases} 4a+2b+c=0 \\ 4a-c=0 \\ a+b+c=-4 \end{cases}$

3) Déterminez alors les réels a , b et c . Donnez l'expression de f(x).

4) Montrer que la courbe de f admet deux asymptotes à préciser. Tracez l'allure de la courbe de f ainsi que ses asymptotes

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR.

b) Montrer que pour tout x∈IR, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}^3}$

c) Dresser le tableau de variations de f.

d) En déduire le signe de f(x) pour tout x∈IR.

2) a) Vérifier que la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation y=x+1.

b) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.

c) Démontrer que le point I(0,1) est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

3) Montrer que le point I est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

4) a) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de +∞ une asymptote horizontale D dont on donnera une équation et au voisinage de -∞ une asymptote horizontale qui est l'axe des abscisses.

b) Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à D et $(O,\vec{\imath})$

5) Tracer $\mathscr{C}_f$, T et D dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. .

6) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, C la courbe représentative de la fonction f^{-1}.

7) a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.

b) Montrer que pour tout x de]0,2[, $f\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right)=x$

c) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$. pour x∈]0,2[.

d) Calculer $(f^{-1})'(x)$.

8) Soit g la fonction définie sur IR par g(x)=f(x)-x.

a) Montrer que g est strictement décroissante sur [0,+∞[.

b) En déduire que l'équation f(x)=x admet une solution unique α dans]1,2[

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie par, $f(x)=\sqrt{\frac{4-x}{1+x}}$ $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Déterminer D_f.

b) déterminer . $\lim_{x\to-1^+} f(x)$

2) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 4. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que f est dérivable sur]-1,4[et que pour tout x∈]-1,4[$f'(x)=\frac{-5}{2(1+x)^2\sqrt{\frac{4-x}{1+x}}}$

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) a) Montrer que f est une bijection de]-1,4[sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Etudier la continuité de f^{-1} sur J.

5) a) Montrer que f^{-1}est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(x)$

b) Donner une équation de la tangente à la courbe C’ de f^{-1} au point d'abscisse 2.
6) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.
7) Explicité f^{-1} pour tout x∈J.
8) Représenter dans le même repère C et C ' courbe représentative de f^{-1} .
9) Montrer que l'équation f(x)=x admet une unique solution $\alpha \in]1,2[$.Déterminer $(f^{-1})'(\alpha)$

Exercice n°6 :

A/ Soit f la fonction définie sur IR par :$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
1)Etudier les variations de f sur IR.
2) Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. préciser les asymptotes de C
3)a) Montrer que C admet un point d’inflexion I que l’on précisera.
b) Ecrire l’équation de la tangente T à C en I.
c) Préciser la position relative de T et C .
4) a) Tracer C et T dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
b) Que représente I pour C ? Justifier.
5) a) Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l’on déterminera.
b) Calculer l’expression de f^{-1} pour x∈J.
c) Tracer la courbe C’ de f^{-1}dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.
6) a) montrer que l’équation f(x)=x admet une solution réelle unique

b) Vérifier que α∈]1,2[.
2)Soit la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 \geq 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$
a) Montrer que pour tout n∈IN ; $1 \leq U_n$.
b) Montrer que pour tout x∈ [1,+∞[; on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$
c) En déduire que pour tout n∈ IN ; $|U_n+1-\alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_n-\alpha|$.
d) Montrer que pour n∈IN ; $|U_n+1-\alpha| \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n |U_0-\alpha|$.
e) En déduire que U converge et déterminer sa limite.

Exercice n°7 :

Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.
1) Etudier les variations de g.
2) Déterminer le nombre de solutions de l’équation $g(x) = 0$ ainsi qu’une valeur approchée à 0,1 près de chacune d’elles.
3) En déduire le signe de $g(x)$ sur ℝ en fonction de x.
4) Soit f la fonction définie sur D_f =]-∞ ; -1[∪[1 ; +∞[par :$f(x) = \frac{\sqrt{x^4-1}}{x+1}$
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire l’existence d’une droite asymptote à C_f.
b) Etudier la dérivabilité de f sur D_f.
5) Démontrer que, pour tout x∈]-∞ ; -1[∪]1 ; +∞[: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)\sqrt{x^4-1}}$
6) En déduire les variations de f.