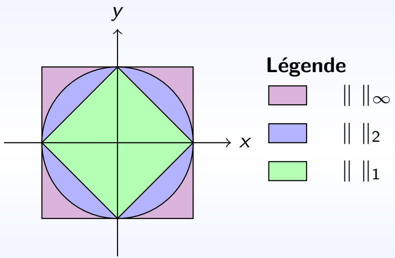
اشتقاق دالة

مبرهنة التزايدات المنتهية

الدكتور محمد والناصر

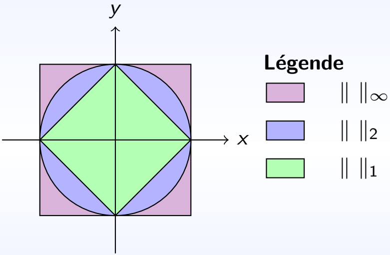
17/01/2014



اشتقاق دالة
مبرهنة التزايدات المتهية

الدكتور محمد والناصر

17/01/2014



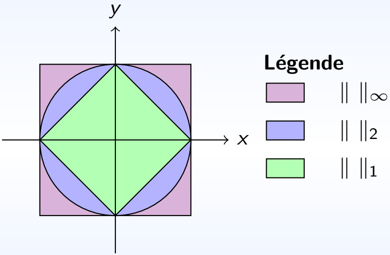
- مبرهنة
- الدالة التزايدية و الاشقاق
- متفاوتة التزايدات المتهية
- طريقة لوبيطال

اشتقاق دالة

مبرهنة التزايدات المنتهية

الدكتور محمد والناصر

17/01/2014



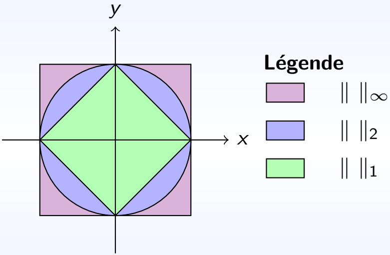
- مبرهنة
- الدالة التزايدية و الاشقاق
- متفاوتة التزايدات المنتهية
- طريقة لوبيطال

اشتقاق دالة

مبرهنة التزايدات المتهية

الدكتور محمد والناصر

17/01/2014



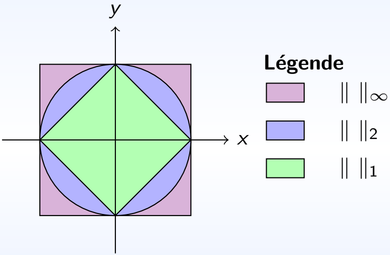
- مبرهنة
- الدالة التزايدية و الاشقاق
- متفاوتة التزايدات المتهية
- طريقة لوبيطال

اشتقاق دالة

مبرهنة التزايدات المتهية

الدكتور محمد والناصر

17/01/2014



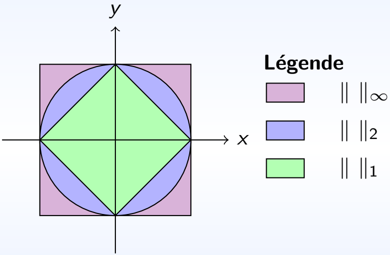
- مبرهنة
- الدالة التزايدية و الاشقاق
- متفاوتة التزايدات المتهية
- طريقة لوبيطال

اشتقاق دالة

مبرهنة التزايدات المتهية

الدكتور محمد والناصر

17/01/2014



- مبرهنة
- الدالة التزايدية و الاشقاق
- متفاوتة التزايدات المتهية
- طريقة لوبيطال

Théorème مبرهنة التزايدات المنتهية :

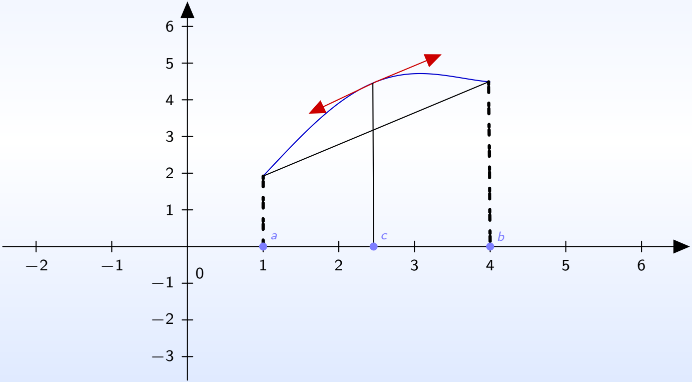
اذا كانت $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة متصلة على $[a, b]$ و مشتقة على $]a, b[$ ، فانه يوجد $c \in]a, b[$ بحيث :

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)}$$

Théorème مبرهنة التزايدات المتهية :

اذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة على $[a,b]$ و مشتقة على $]a,b[$ ، فانه يوجد $c\in]a,b[$ بحيث :

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)}$$



Théorème — مبرهنة التزايدات المتهية :

اذا كانت $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة عددية متصلة على المجال $[a, b]$ و تقبل الاشتقاق على $]a, b[$ فانه يوجد عدد $c \in]a, b[$ بحيث

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)}$$

Démonstration — برهان

Théorème

مبرهنة التزايدات المتهية :

اذا كانت $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة عددية متصلة على المجال $[a, b]$ و تقبل الاشتقاق على $]a, b[$ فانه يوجد عدد $c \in]a, b[$ بحيث

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)}$$

Démonstration

برهان

* لنضع $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و $g(x) = f(x) - \ell \cdot (x - a)$

Théorème — مبرهنة التزايدات المنتهية :

اذا كانت $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة عددية متصلة على المجال $[a, b]$ و تقبل الاشتقاق على $]a, b[$ فانه يوجد عدد $c \in]a, b[$ بحيث

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)}$$

Démonstration — برهان

* لنضع $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و $g(x) = f(x) - \ell \cdot (x - a)$

* اذن لدينا $g(a) = f(a)$ و $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b - a) = f(a)$

Théorème　　　مبرهنة التزايدات المتهية :

اذا كانت $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة عددية متصلة على المجال $[a, b]$ و تقبل الاشتقاق على $]a, b[$ فانه يوجد عدد $c \in]a, b[$ بحيث

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)}$$

Démonstration　　　برهان

* لنضع $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و $g(x) = f(x) - \ell \cdot (x - a)$
* اذن لدينا $g(a) = f(a)$ و $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b - a) = f(a)$
* حسب مبرهنة رول يوجد عدد حقيقي $c \in]a, b[$ بحيث $g'(c) = 0$.

Théorème — مبرهنة التزايدات المتهية :

اذا كانت $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة عددية متصلة على المجال $[a, b]$ و تقبل الاشتقاق على $]a, b[$ فانه يوجد عدد $c \in]a, b[$ بحيث

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)}$$

Démonstration — برهان

* لنضع $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و $g(x) = f(x) - \ell \cdot (x - a)$
* اذن لدينا $g(a) = f(a)$ و $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b - a) = f(a)$
* حسب مبرهنة رول يوجد عدد حقيقي $c \in]a, b[$ بحيث $g'(c) = 0$.
* وبما ان $g'(x) = f'(x) - \ell$ فاننا نحصل على $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

□

لازمة **Corollaire**

لتكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة عددية متصلة على المجال $[a, b]$ و مشتقة على المجال $]a, b[$

، لدينا :

Corollaire لازمة

لتكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة عددية متصلة على المجال $[a, b]$ و مشتقة على المجال $]a, b[$ ، لدينا :

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad$ f تزايدية .

Corollaire لازمة

لتكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ دالة عددية متصلة على المجال $[a, b]$ و مشتقة على المجال $]a, b[$ ، لدينا :

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow$ f تزايدية .
2. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow$ f تناقصية .

Corollaire لازمة

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة عددية متصلة على المجال $[a,b]$ و مشتقة على المجال $]a,b[$ ، لدينا :

1. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geqslant 0 \iff$ f تزايدية .
2. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \leqslant 0 \iff$ f تناقصية .
3. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) = 0 \iff$ f ثابتة .

لازمة Corollaire

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة عددية متصلة على المجال $[a,b]$ و مشتقة على المجال $]a,b[$ ، لدينا :

1. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x)\geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow$ f تزايدية .
2. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x)\leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow$ f تناقصية .
3. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x)= 0 \quad \Longleftrightarrow$ f ثابتة .
4. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x)> 0 \quad \Longrightarrow$ f تزايدية قطعا .

Corollaire لازمة

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة عددية متصلة على المجال $[a,b]$ و مشتقة على المجال $]a,b[$ ، لدينا :

1. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geqslant 0 \iff$ f تزايدية .
2. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \leqslant 0 \iff$ f تناقصية .
3. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) = 0 \iff$ f ثابتة .
4. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0 \implies$ f تزايدية قطعا .
5. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0 \implies$ f تناقصية قطعا .

Démonstration برهان

f تزايدية $\iff$ $f'(x) \geqslant 0$

Démonstration

برهان

$$f \text{ تزايدية} \iff f'(x) \geqslant 0$$

$\Longrightarrow$ ▶ نفترض ان الدالة المشتقة موجبة . ليكن $x, y \in]a, b[$ مع $x \leqslant y$.

Démonstration

برهان

$f'(x) \geqslant 0 \iff$ تزايديةf

$\Longrightarrow$

- نفترض ان الدالة المشتقة موجبة . ليكن $x, y \in]a, b[$ مع $x \leqslant y$.
- باستعمال مبرهنة التزايدات المتهية ، يوجد $c \in]x, y[$ بحيث :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

Démonstration　　برهان

f تزايدية $\iff f'(x) \geqslant 0$

$\Longrightarrow$

- نفترض ان الدالة المشتقة موجبة . ليكن $x, y \in]a, b[$ مع $x \leqslant y$.
- باستعمال مبرهنة التزايدات المتهية ، يوجد $c \in]x, y[$ بحيث :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

- وبما ان $f'(c) \geqslant 0$ و $x - y \leqslant 0$ فاننا نستنتج ان $f(x) - f(y) \leqslant 0$

Démonstration   برهان

$$f \text{ تزايدية } \iff f'(x) \geqslant 0$$

$\Longrightarrow$

- نفترض ان الدالة المشتقة موجبة . ليكن $x, y \in]a, b[$ مع $x \leqslant y$.
- باستعمال مبرهنة التزايدات المتهية ، يوجد $c \in]x, y[$ بحيث :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

- وبما ان $f'(c) \geqslant 0$ و $x - y \leqslant 0$ فاننا نستنتج ان $f(x) - f(y) \leqslant 0$
- ومنه $f(x) \leqslant f(y)$ وبالتالي f تزايدية .

Démonstration

برهان

$$f \text{ تزايدية} \iff f'(x) \geqslant 0$$

$\Longrightarrow$

- نفترض ان الدالة المشتقة موجبة . ليكن $x, y \in]a, b[$ مع $x \leqslant y$.
- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، يوجد $c \in]x, y[$ بحيث :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

- وبما ان $f'(c) \geqslant 0$ و $x - y \leqslant 0$ فاننا نستنتج ان $f(x) - f(y) \leqslant 0$
- ومنه $f(x) \leqslant f(y)$ وبالتالي f تزايدية .

$\Longleftarrow$

نفترض ان الدالة f تزايدية . ليكن $x_0 \in]a, b[$ عنصرا ثابتا .

Démonstration برهان

$$f \text{ تزايدية} \iff f'(x) \geqslant 0$$

$\Longrightarrow$

- نفترض ان الدالة المشتقة موجبة . ليكن $x, y \in]a, b[$ مع $x \leqslant y$.
- باستعمال مبرهنة التزايدات المتهية ، يوجد $c \in]x, y[$ بحيث :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

- وبما ان $f'(c) \geqslant 0$ و $x - y \leqslant 0$ فاننا نستنتج ان $f(x) - f(y) \leqslant 0$
- ومنه $f(x) \leqslant f(y)$ وبالتالي f تزايدية .

$\Longleftarrow$

نفترض ان الدالة f تزايدية . ليكن $x_0 \in]a, b[$ عنصرا ثابتا .
لاجل كل $y > x_0$ لدينا $y - x_0 > 0$ و $f(y) - f(x_0) \geqslant 0$.

برهان
Démonstration

$$f \text{ تزايدية} \iff f'(x) \geqslant 0$$

$\Longrightarrow$

- نفترض ان الدالة المشتقة موجبة . ليكن $x, y \in]a, b[$ مع $x \leqslant y$.
- باستعمال مبرهنة التزايدات المتهية ، يوجد $c \in]x, y[$ بحيث :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

- وبما ان $f'(c) \geqslant 0$ و $x - y \leqslant 0$ فاننا نستنتج ان $f(x) - f(y) \leqslant 0$
- ومنه $f(x) \leqslant f(y)$ وبالتالي f تزايدية .

$\Longleftarrow$

نفترض ان الدالة f تزايدية . ليكن $x_0 \in]a, b[$ عنصرا ثابتا .
لاجل كل $y > x_0$ لدينا $y - x_0 > 0$ و $f(y) - f(x_0) \geqslant 0$.
ومنه فان معدل التغير يحقق : $\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \geqslant 0$

Démonstration   برهان

$$f \text{ تزايدية} \iff f'(x) \geqslant 0$$

$\Longrightarrow$

- نفترض ان الدالة المشتقة موجبة . ليكن $x, y \in]a, b[$ مع $x \leqslant y$.
- باستعمال مبرهنة التزايدات المتهية ، يوجد $c \in]x, y[$ بحيث :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

- وبما ان $f'(c) \geqslant 0$ و $x - y \leqslant 0$ فاننا نستنتج ان $f(x) - f(y) \leqslant 0$
- ومنه $f(x) \leqslant f(y)$ وبالتالي f تزايدية .

$\Longleftarrow$

نفترض ان الدالة f تزايدية . ليكن $x_0 \in]a, b[$ عنصرا ثابتا .
لاجل كل $y > x_0$ لدينا $y - x_0 > 0$ و $f(y) - f(x_0) \geqslant 0$.
ومنه فان معدل التغير يحقق : $\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \geqslant 0$
وبالتالي فان :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \geqslant 0$$

Démonstration   برهان

$$f \text{ تزايدية} \iff f'(x) \geqslant 0$$

$\Longrightarrow$

- نفترض ان الدالة المشتقة موجبة . ليكن $x, y \in]a, b[$ مع $x \leqslant y$.
- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، يوجد $c \in]x, y[$ بحيث :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

- وبما ان $f'(c) \geqslant 0$ و $x - y \leqslant 0$ فاننا نستنتج ان $f(x) - f(y) \leqslant 0$
- ومنه $f(x) \leqslant f(y)$ وبالتالي f تزايدية .

$\Longleftarrow$

نفترض ان الدالة f تزايدية . ليكن $x_0 \in]a, b[$ عنصرا ثابتا .
لاجل كل $y > x_0$ لدينا $y - x_0 > 0$ و $f(y) - f(x_0) \geqslant 0$.
ومنه فان معدل التغير يحقق : $\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \geqslant 0$
وبالتالي فان :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \geqslant 0$$

ومنه :

$$f'(x_0) \geqslant 0$$

□

Corollaire **لازمة**

متفاوتة التزايدات المتهية

..

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .

اذا وجدت ثابتة M بحيث لاجل كل $x \in I$ ، $\left|f'(x)\right| \leqslant M$ فانه لدينا :

$$\boxed{\forall x, y \in I \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant M|x - y|}$$

Corollaire — **لازمة**

متفاوتة التزايدات المنتهية

..

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .

اذا وجدت ثابتة M بحيث لاجل كل $x \in I$ ، $|f'(x)| \leqslant M$ فانه لدينا :

$$\boxed{\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|}$$

Démonstration — برهان

نأخذ عنصرين ثابتين $x, y \in I$.

Corollaire ..

لازمة
متفاوتة التزايدات المتهية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .
اذا وجدت ثابتة M بحيث لاجل كل $x \in I$ ، $\left|f'(x)\right| \leqslant M$ فانه لدينا :

$$\boxed{\forall x, y \in I \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant M|x - y|}$$

Démonstration

برهان

نأخذ عنصرين ثابتين $x, y \in I$.

يوجد اذن c في $]x, y[$ او في $]y, x[$ بحيث $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$.

Corollaire لازمة

.. متفاوتة التزايدات المنتهية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .
اذا وجدت ثابتة M بحيث لاجل كل $x \in I$ ، $\left|f'(x)\right| \leqslant M$ فانه لدينا :

$$\boxed{\forall x, y \in I \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant M|x - y|}$$

Démonstration برهان

نأخذ عنصرين ثابتين $x, y \in I$.

يوجد اذن c في $]x, y[$ او في $]y, x[$ بحيث $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$.

وبما ان $|f'(c)| \leqslant M$ فان $\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant M|x - y|$

□

Exemple مثال

لتكن $f(x) = \sin(x)$

مثال Exemple

لتكن $f(x) = \sin(x)$

- بما ان $f'(x) = \cos x$ فان $|f'(x)| \leqslant 1$

مثال Exemple

لتكن $f(x) = \sin(x)$

- بما ان $f'(x) = \cos x$ فان $|f'(x)| \leqslant 1$
- متفاوتة التزايدات المتهية لدينا لاجل كل $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$$

مثال Exemple

لتكن $f(x) = \sin(x)$

- بما ان $f'(x) = \cos x$ فان $|f'(x)| \leqslant 1$
- متفاوتة التزايدات المتهية لدينا لاجل كل $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$$

- واذا اخذنا $y = 0$ فاننا نحصل على : $\boxed{|\sin x| \leqslant |x|}$

Exemple مثال

لتكن $f(x) = \sin(x)$

- بما ان $f'(x) = \cos x$ فان $|f'(x)| \leqslant 1$
- متفاوتة التزايدات المتهية لدينا لاجل كل $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$$

- واذا اخذنا $y = 0$ فاننا نحصل على : $\boxed{|\sin x| \leqslant |x|}$

Corollaire لازمة

Règle de l'Hospital طريقة لوبيطال

لتكن $f, g : I \to \mathbb{R}$ دالتان عدديتان قابلتان للاشتقاق ، و ليكن $x_0 \in I$.

Corollaire — لازمة

Règle de l'Hospital — طريقة لوبيطال

لتكن $f, g : I \to \mathbb{R}$ دالتان عدديتان قابلتان للاشتقاق ، و ليكن $x_0 \in I$.

مع: .

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$

Corollaire **لازمة**

Règle de l'Hospital طريقة لوبيطال

لتكن $f, g : I \to \mathbb{R}$ دالتان عدديتان قابلتان للاشتقاق ، و ليكن $x_0 \in I$.

مع: .

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell}$$

Exemple مثال

لنحسب النهاية التالية . $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

Exemple مثال

لنحسب النهاية التالية . $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $f(x)=\ln(x^2+x-1)$ ، $f(1)=0$ ، $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-1}$

Exemple — مثال

لنحسب النهاية التالية . $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $f(x)=\ln(x^2+x-1)$ ، $f(1)=0$ ، $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-1}$
- $g(x)=\ln(x)$ ، $g(1)=0$ ، $g'(x)=\frac{1}{x}$

مثال Exemple

لنحسب النهاية التالية . $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $f(x)=\ln(x^2+x-1)$ ، $f(1)=0$ ، $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-1}$
- $g(x)=\ln(x)$ ، $g(1)=0$ ، $g'(x)=\frac{1}{x}$
- نأخذ $I=]0,1]$ ، $x_0=1$ ، اذن g' لا تنعدم على $I \setminus \{x_0\}$

Exemple مثال

لنحسب النهاية التالية . $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $f(x) = \ln(x^2+x-1)$ ، $f(1) = 0$ ، $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$
- $g(x) = \ln(x)$ ، $g(1) = 0$ ، $g'(x) = \frac{1}{x}$
- نأخذ $I =]0,1]$ ، $x_0 = 1$ ، اذن g' لا تنعدم على $I \setminus \{x_0\}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple مثال

لنحسب النهاية التالية . $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $f(x) = \ln(x^2+x-1)$ ، $f(1) = 0$ ، $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$
- $g(x) = \ln(x)$ ، $g(1) = 0$ ، $g'(x) = \frac{1}{x}$
- نأخذ $I =]0,1]$ ، $x_0 = 1$ ، اذن g' لا تنعدم على $I \setminus \{x_0\}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x$$

Exemple مثال

لنحسب النهاية التالية . $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $f(x)=\ln(x^2+x-1)$ ، $f(1)=0$ ، $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-1}$
- $g(x)=\ln(x)$ ، $g(1)=0$ ، $g'(x)=\frac{1}{x}$
- نأخذ $I=]0,1]$ ، $x_0=1$ ، اذن g' لا تنعدم على $I\setminus\{x_0\}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x+1}{x^2+x-1}\times x=\frac{2x^2+x}{x^2+x-1}$$

Exemple مثال

لنحسب النهاية التالية . $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $f(x)=\ln(x^2+x-1)$ ، $f(1)=0$ ، $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-1}$
- $g(x)=\ln(x)$ ، $g(1)=0$ ، $g'(x)=\frac{1}{x}$
- نأخذ $I=]0,1]$ ، $x_0=1$ ، اذن g' لا تنعدم على $I\setminus\{x_0\}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x+1}{x^2+x-1}\times x=\frac{2x^2+x}{x^2+x-1}\xrightarrow[x\to 1]{}3$$

Exemple مثال

لنحسب النهاية التالية . $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $f(x) = \ln(x^2+x-1)$ ، $f(1) = 0$ ، $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$
- $g(x) = \ln(x)$ ، $g(1) = 0$ ، $g'(x) = \frac{1}{x}$
- نأخذ $I =]0,1]$ ، $x_0 = 1$ ، اذن g' لا تنعدم على $I \setminus \{x_0\}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} 3$$

وبالتالي :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 1]{} 3$$

سلسلة صغيرة Mini-exercices

♦ لتكن $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x+2$. ادرس الدالة f . ارسم منحناها . بين ان f تقبل قيمة دنيا محلية وقيمة قصوى محلية .

♦ لتكن الدالة العددية $f(x)=\sqrt{x}$. باستعمال مبرهنة التزايدات المتهية على المجال $[100,101]$. استنتج التأطير التالي : $10+\frac{1}{22}\leqslant\sqrt{101}\leqslant 10+\frac{1}{20}$.

♦

استعمل مبرهنة التزايدات المتهية من اجل ان تبين انه لاجل كل $x>0$ لدينا :

$$\ln(1+x)-\ln(x)<\frac{1}{x}$$

♦ لتكن $f(x)=e^x$. ماذا تعطينا متفاوتة التزايدات المتهية على المجال $[0,x]$ ؟ استنتج انه لاجل كل $x\geqslant 0$ لدينا : $e^x-1\leqslant xe^x$.

♦ طبق طريقة لوبيطال من اجل حساب النهايات التالية (عندما يؤول x الى الصفر) :

$$\frac{x}{(1+x)^n-1}\,;\ \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\,;\ \frac{1-\cos x}{\tan x}\,;\ \frac{x-\sin x}{x^3}.$$