Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire :**2013/2014	**Résumé de cours :Intégrales** **Khammour-Math**	$4^{\text{ème}}$ Sc-Exp **Tél :27509639**

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné I. Soient a et b deux réels de I. F est la primitive de f sur I.
On appelle intégrale de f a à b de f le nombre réel noté :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Propriétés :

- Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné I. Alors :
  $\int_a^a f(x)\,dx = 0$; $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ $\int_a^b dx = [x]_a^b = b - a$
- **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
- **Positivité** :Si f est continue et positive sur [a,b] et $a < b$ alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Intégrale d'une égalité :

Soient f et g deux fonctions continues sur [a,b] avec $a < b$ alors :

f ≤ g sur [a,b] $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Parité :

Soit f une fonction continue sur un intervalle symétrique [-a,a] :

- Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
- Si f est impair alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Intégration par partie :

Soit U et V deux fonctions dérivables sur [a,b] alors :

$$\boxed{\int_a^b U(x).V'(x)\,dx = [U.V]_a^b - \int_a^b U'(x).V(x)\,dx}$$

Théorème :

Soit f une fonction continue sur I et g une fonction continue sur J telle que $g(J)\subset I$ .Alors la fonction F définie sur J par $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\ dt$ est dérivable sur J et $\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{x}) \times \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$

Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur [a,b] :On appelle valeur moyenne de f sur [a,b] le réel ,noté $\bar{f}$

$$\boxed{\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx}$$

Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur [a,b] (a<b).Soit M et m deux réels ,si pour tout x de [a,b] $m \leq f(x) \leq M$ alors $m \leq \bar{f} \leq M$

Calcul d'aires :

- Soit f une fonction continue et positive sur [a,b] .L'aire $\mathcal{A}$ du domaine définie par : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ est $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\, dx$
- Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit f et g deux fonctions continues sur [a,b].
  L'aire de la partie du plan limitée par la courbe f,la courbe de g et les droites d'équations x=a et x=b est le réel :
  $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$

Calcul de volumes de solides de révolution :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit f une fonction continue et positive sur [a,b].Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\widehat{AB}$ est :
$\widehat{AB} = \{M(x,y)\text{tel que } y = f(x) \text{et } a \leq x \leq b\}$ au tour de l'axe $(O, \vec{\imath})$est le réel :
$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Exercice :

Soit la fonction f définie sur [0,1] par :$f(x) = 2\sqrt{x} - x$

1) Montrer que f dérivable sur]0,1].Dresser son tableau de variations.
2) a)Montrer que f est une bijection de [0,1] sur un intervalle J que l'on précisera .On note g sa fonction réciproque .

   b)Etudier la dérivabilité de de g sur]0,1[.
3) Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ C_f et C_g.
4) Expliciter g(x) pour tout x de J.
5) Calculer l'aire délimitée par C_f et C_g et les droites d'équations x=0 et x=1.

Solution :

1) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$

   $x \to \sqrt{x}$ dérivable sur]0,1] donc f dérivable sur]0,1].$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1
f '(x)	||	+	0
f (x)	0	$\nearrow$	1

2) a) f continue et strictement croissante sur [0,1] alors elle réalise une bijection de [0,1] sur f ([0,1]) =[0,1].
   On note $f^{-1} = g$
   b) On a f dérivable sur]0,1[et f '(x)$\neq$ 0 pour tout x de]0,1[, alors g dérivable sur f (]0,1[)=]0,1[
3) Voir courbe .
4) Soit $x \in [0,1]$; $y \in [0,1]$ tel que $f(y) = x \Leftrightarrow 2\sqrt{y} - y = x$

   $\Leftrightarrow y - 2\sqrt{y} + 1 - 1 = -x \Leftrightarrow \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = 1 - x \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 + \sqrt{1 - x}$ ou

   $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{1 - x} \Leftrightarrow y = \left(1 + \sqrt{1 - x}\right)^2$ ou $y = \left(1 - \sqrt{1 - x}\right)^2$ or $y \in [0,1]$ et

   $\left(1 + \sqrt{1 - x}\right)^2 \geq 1$ donc $y = \left(1 - \sqrt{1 - x}\right)^2$ et par suite

$$g(x) = \left(1 - \sqrt{1-x}\right)^2$$

5) $\int_0^1 \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_0^1 2\sqrt{x} - 2 + 2\sqrt{1-x}\,dx =$

$2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx - 2 + 2\int_0^1 \sqrt{1-x} = \frac{4}{3} - 2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$

Courbe