

**Exercice n°1 :**

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + x^2)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) \ln x$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2 + \ln x)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + (\ln x)^2)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \ln x \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2 \ln x + 1}{x} \right)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - \ln x}{x} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \ln x)$

**Exercice n°2 :**

Soit g définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + 2 \ln x$

- 1) a) Etudier les variations de g.  
b) En déduire le signe de g sur  $[0, +\infty[$
- 2) Soit f définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = 1 - x + (2x - 1) \ln x$ .  
a) Etudier les variations de f.  
b) Etudier la position relative de  $C_f$  par rapport à  $\Delta: y = x$ .

**Exercice n°3 :**

- 1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle  $] -1, +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$ .  
a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .  
b) Dresser le tableau de variation de g .  
c) Calculer g (0).En déduire le signe de g (x) sur l'intervalle  $] -1, +\infty[$ .
- 2) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle  $] -1, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x$  et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative de f dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
a) Montrer que pour tout  $x \in ] -1, +\infty[$   $f'(x) = -\frac{g(x)}{(x+1)^2}$   
b) Dresser le tableau de variation de f.
- 3) a) Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = -x$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$   
b) Etudier la position relative de  $(C_f)$  par rapport à  $\Delta$ .  
c) Tracer la courbe  $(C_f)$ .
- 4) Soit h la fonction définie sur l'intervalle  $] -1, +\infty[$  par :  $h(x) = [\ln(x + 1)]^2$ .  
a) Calculer  $h'(x)$ .  
b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle  $] -1, +\infty[$ .

### **Exercice n°4 :**

- 1) On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .
- Déterminer les limites de la fonction  $f$  en  $0$  et en  $+\infty$ .
  - Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .
  - En déduire les variations de la fonction  $f$ .
- 2) On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ .
- Déterminer les limites de la fonction  $g$  en  $0$  et en  $+\infty$ .
- (Indication  $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$ )
- Calculer la dérivée  $g'$  de la fonction  $g$ .
  - En déduire les variations de la fonction  $g$ .
- 3) a) Démontrer que les courbes  $C_f$  et  $C_g$  possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.  
b) Étudier la position relative des courbes  $C_f$  et  $C_g$ .  
c) Tracer  $C_f$  et  $C_g$ .

### **Exercice n°5 :**

#### **Partie A**

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x$ .

- Calculer  $g'(x)$  et donner le sens de variation de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0, +\infty[$ .

#### **Partie B**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = 3 - x - 2 \frac{\ln x}{x}$ .

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan ayant pour unités graphiques: 4 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

- Étudier la limite de  $f$  en  $0$  et interpréter graphiquement le résultat.
  - Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  et montrer que  $f'(x) = -2 \frac{g(x)}{x^2}$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
- a) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 3$  est asymptote à la courbe  $(C)$ .

- b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de (C) et de (D) .
- c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) .
- 3) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
- 4) Tracer avec soin (T), (D) et la courbe (C) dans le plan muni du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### **Exercice n°6:**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = (1 + \frac{1}{x}) \ln x$  .

On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### **Partie A**

Soit  $g$  la fonction définie sur par  $]0, +\infty[$  :  $g(x) = x + 1 - \ln x$ .

- 1) a) Calculer  $g'(x)$ .
- b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 2) Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $]0, +\infty[$  .

#### **Partie B**

- 1) a) Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
- b) Déterminer la limite de la fonction  $f$  en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  et montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .
- b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- c) Calculer  $f(1)$ . En déduire le signe de  $f(x)$  sur  $]0, +\infty[$  .
- 3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
- b) Tracer (C) et (T) .
- 4) Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$  qui prend la valeur -1 en 1 .
- a) Montrer que  $F(x) = x \ln x - x + \frac{1}{2} (\ln x)^2$ .
- b) Dresser le tableau de variation de  $F$  sur  $]0, +\infty[$  .

### **Exercice n°7 :**

La courbe ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  .

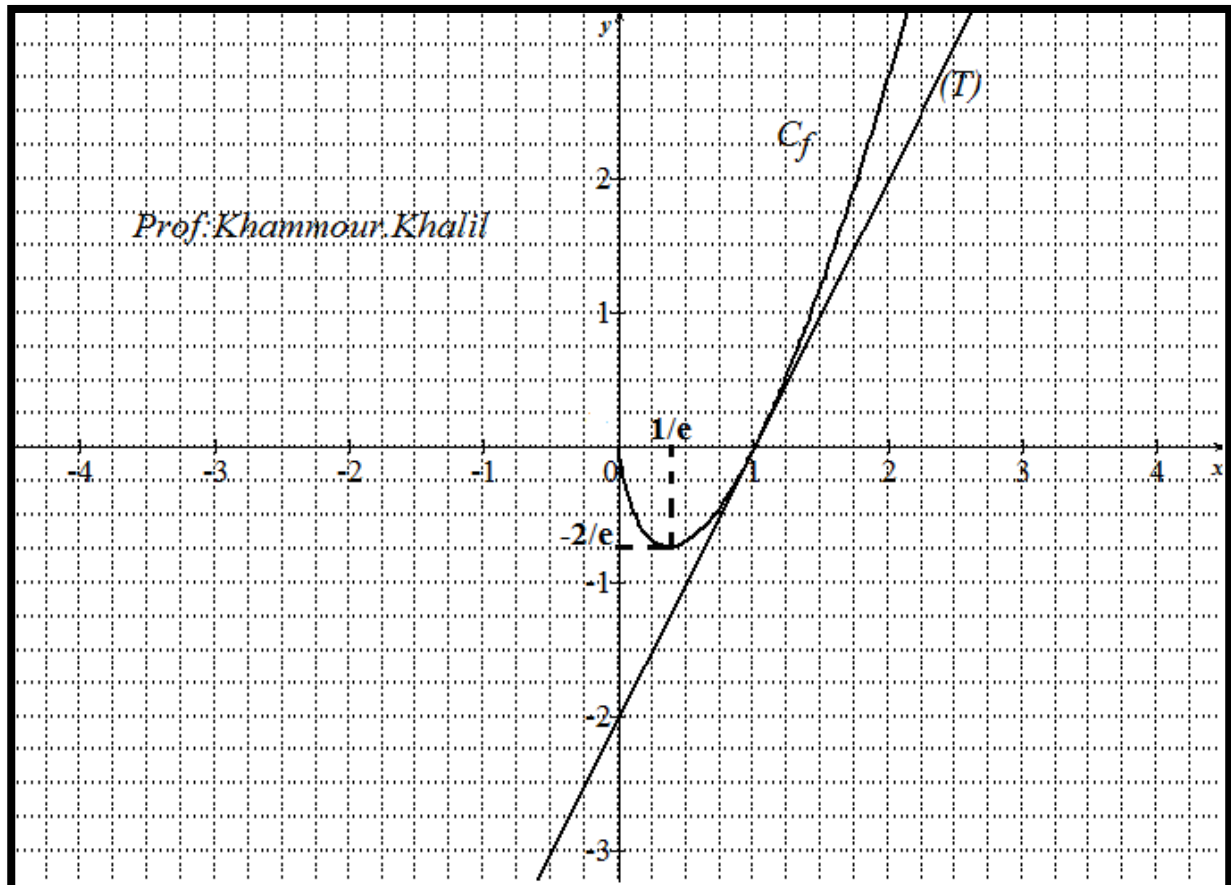
La droite (T) est sa tangente au point d'abscisse 1.

#### **Par lecture graphique**

- 1) Donner les valeurs de  $f(\frac{1}{e})$  et  $f'(1)$ .
- 2) Etudier le signe de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
- 3) On admet que la fonction  $f$  est définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = (ax + b) \ln x$ .
- a) Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

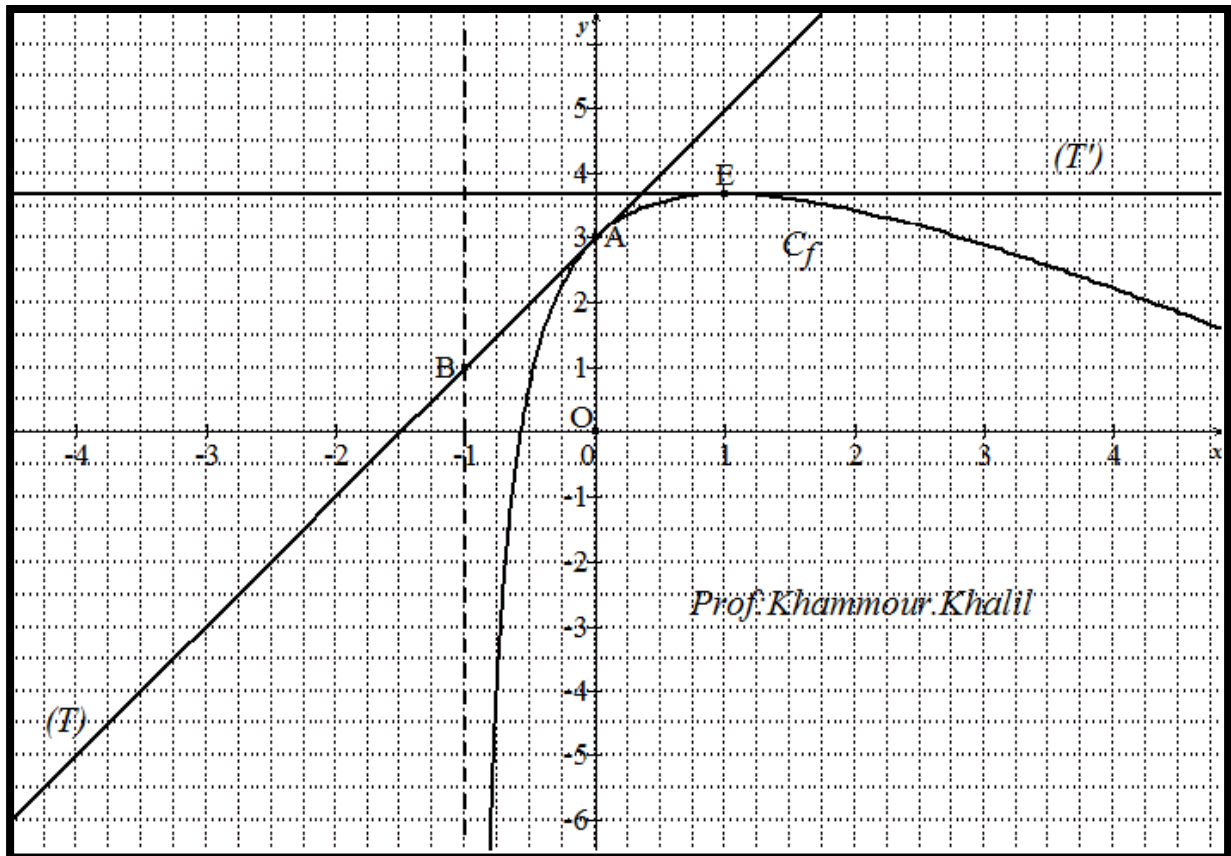
- b) Déterminer alors les valeurs de a et b .
- 4) On considère les fonctions F et G définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $F(x) = x^2(\ln x - \frac{1}{2})$  et  $G(x) = x^2(1 - \ln x)$
- a) Calculer  $F'(x)$  et  $G'(x)$ .
- b) En déduire la primitive de f sur  $]0, +\infty[$  .

### La courbe de la fonction f



### Exercice n°8 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Sur la figure ci-dessous, la courbe ( $C_f$ ) représente une fonction f définie sur l'intervalle  $] -1, +\infty[$  . On a placé les points  $A(0 ; 3)$  ,  $B(-1 ; 1)$  et  $E(1 ; 3+\ln 2)$ . La droite (T) est tangente en A à la courbe ( $C_f$ ) et la droite (T') est tangente en E , à la courbe ( $C_f$ ).



**Par lecture graphique :**

- 1) a) Déterminer l'équation de la tangente (T).  
 b) Déterminer  $f(0)$  ,  $f'(0)$  ,  $f(1)$  ,  $f'(1)$ .  
 c) Le nombre de solutions de l'équation  $f(x)=1$ .
- 2) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) On admet que la fonction  $f$  est définie par :  $f(x) = ax + 5 + \frac{b}{x+1} + \ln(x + 1)$ .  
 a) Vérifier que  $f(x) = -x + 5 - \frac{2}{x+1} + \ln(x + 1)$ .  
 b) Soit la fonction  $g$  définie sur  $] -1, +\infty[$  par :  $g(x) = -x + (x + 1) \ln(x + 1)$ . Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x$  de  $] -1, +\infty[$ .  
 c) En déduire une primitive de  $f$  sur  $] -1, +\infty[$ .

**Exercice n°9 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1, +\infty[$  par :  $f(x) = 2 \ln(x + 1) + 1$ .

- 1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.  
 b) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  appartenant à  $] -1, +\infty[$ .
- 2) a) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $] -1, +\infty[$ .

- b) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 3) On considère la droite (D) d'équation  $y = 0,8x$ . Construire (D).

**Application économique :**

Une entreprise fabrique des pièces pour avions. On note  $x$  le nombre de pièces fabriquées par mois avec  $0 \leq x \leq 15$ . Chaque mois, les coûts de production, exprimés en milliers d'euros, sont donnés par:  $f(x) = 2 \ln(x + 1) + 1$ .

Le prix de vente d'une pièce est 0,8 milliers d'euros.

- 1) Si l'entreprise vend  $x$  pièces, déterminer la recette exprimée en milliers d'euros.
- 2) Vérifier que le bénéfice mensuel est :  $B(x) = 0,8x - 1 - 2 \ln(x + 1)$ .
- 3) Calculer une valeur approchée de  $B(3)$  et  $B(14)$ , puis préciser pour chacun de ces cas si l'entreprise est bénéficiaire.

**Exercice n°10 :**

On considère la fonction f définie sur  $] 1, +\infty[$  par :  $f(x) = \ln(x^3 - x^2)$ .

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2) a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  appartenant à  $] 1, +\infty[$ .
- 3) b) Dresser le tableau de variation de f.
- 4) Montrer que l'équation  $f(x)=0$  admet sur  $] 1, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ .  
Donner la valeur arrondie à  $10^{-1}$  près de  $\alpha$ .
- 5) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 6) Soit h la fonction définie sur  $] 1, +\infty[$  par :  $h(x) = 2x \ln x + (x - 1) \ln(x - 1)$ .  
a) Calculer  $h'(x)$ .  
b) En déduire une primitive de la fonction f sur  $] 1, +\infty[$ .

**Application économique :**

On considère une machine produisant un liquide chimique, pour quelle soit rentable cette machine doit produire au moins 2 hectolitres.

De plus le liquide produit est dangereux et impose une fabrication maximale de 9 hectolitres avant révision de la machine.

Pour tout  $x$  de  $[2,9]$ , la valeur de cout marginal  $C(x)$  est exprimé en milliers d'euros est donné par  $C(x) = \ln(x^3 - x^2)$  et  $C_T(x)$  est le cout totale de fabrication de  $x$  hectolitres de liquides. On rappelle que  $C'_T(x) = C(x)$ .

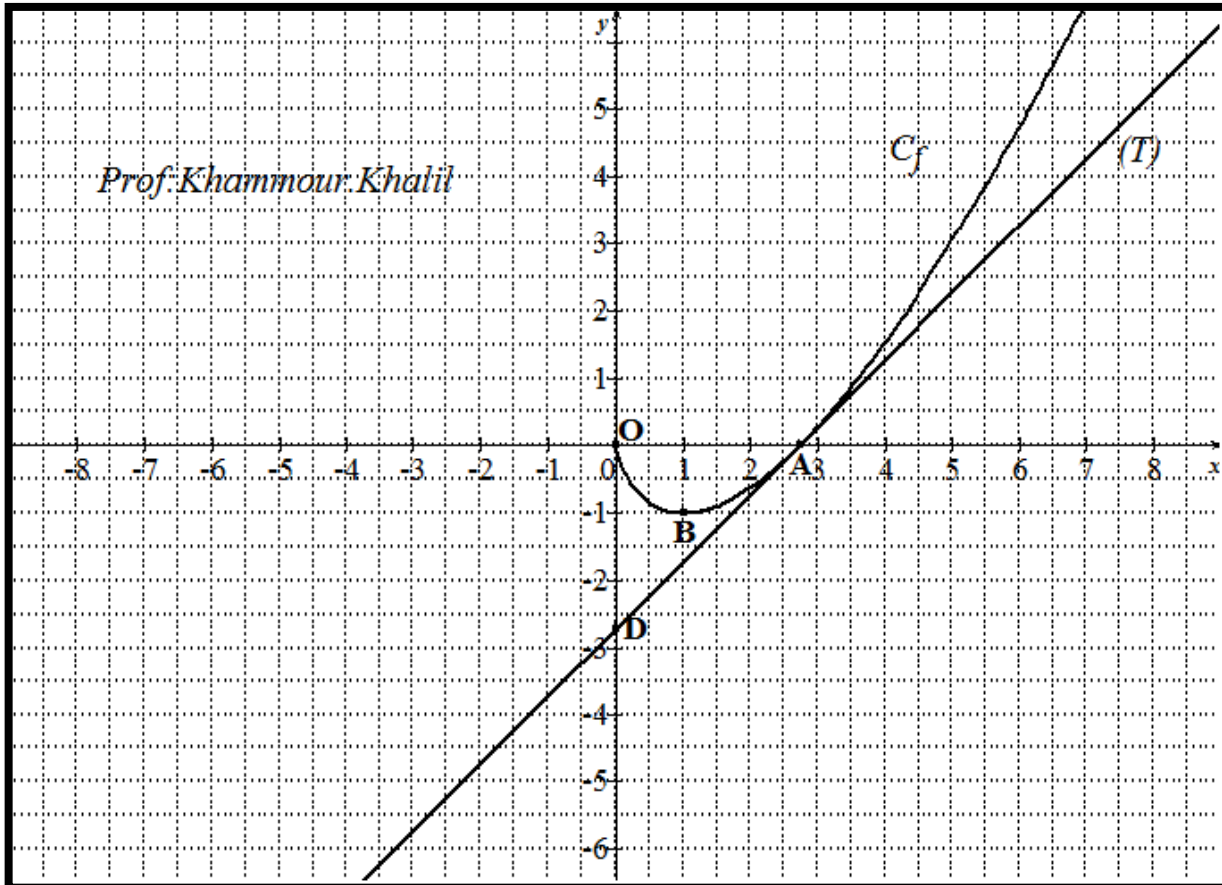
Le cout total de deux premiers hectolitres (mise en route de la machine et fabrication) est 10 milliers d'euros ce qui se traduit par  $C_T(2) = 10$ .

- 1) Déterminer le cout total  $C_T(x)$  en fonction de  $x$ .
- 2) Calculer  $C_T(9) - C_T(2)$ . On donnera d'abord la valeur exacte de puis un valeur approchés à l'euros près. Donner une Interprétation graphiquement.

### Exercice n°11 :

La courbe ( $C_f$ ) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

La courbe ( $C_f$ ) passe par les points  $A(e,0)$  et  $B(1,-1)$ .



#### **Partie A**

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et une tangente (T) au point d'abscisse  $e$  passe par le point  $D(0,-e)$ .

- 1) Déterminer une équation de la droite (T).
- 2) Par lecture graphique déterminer :
  - a)  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
  - b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
  - c) Etudier le signe de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

#### **Partie B**

- 1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = x(\ln(x) - 1)$ .
  - a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .
- 2) a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ .
  - b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - c) Etudier le signe de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .