APPLICATIONS PEDAGOGIQUES-2

***

CINEMATIQUE DU SOLIDE

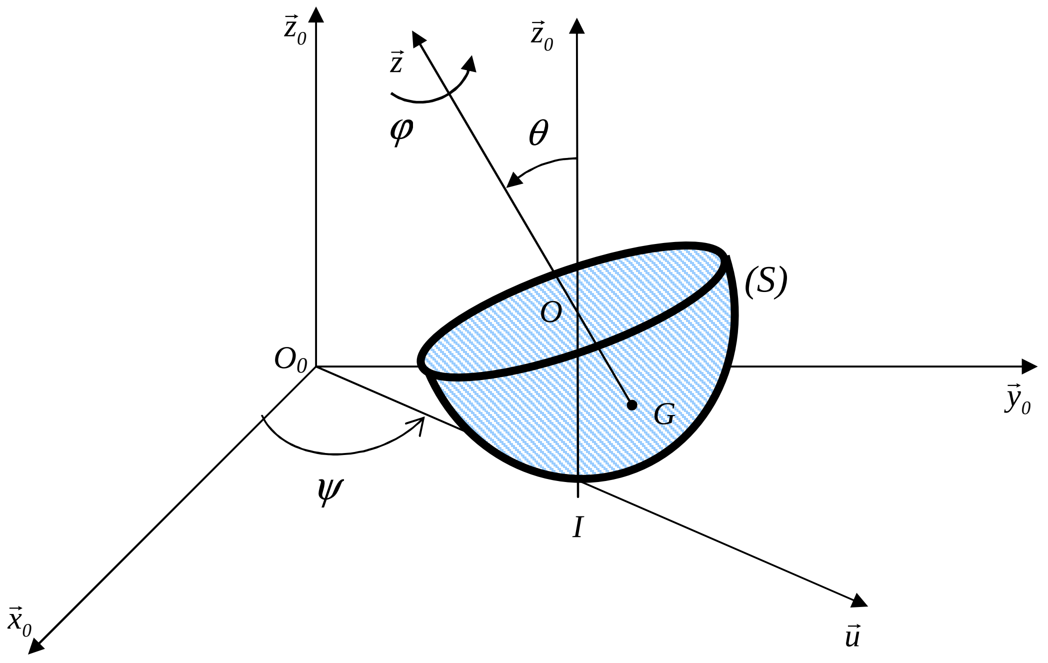
Rachid MESRAR

Application pédagogique n° 1 : mouvement d'une demi-boule en contact avec un plan fixe

Notions abordées :

- *Paramétrage d'un solide*
- *Torseur cinématique*
- *Axe instantané de rotation et de glissement (AIRG)*
- *Invariant scalaire – Invariant vectoriel*

On considère une demi-boule homogène (S), de rayon R, de masse m et de centre d'inertie G. On note O le centre du cercle de la base et on admettra que $OG = \frac{3R}{8}$*. Un repère orthonormé direct* $R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *est lié à (S) de telle sorte que l'axe* $(G,\vec{z})$ *soit confondu avec* $\overrightarrow{GO}$ *et de même sens (voir figure).*



Cette demi-boule est en contact ponctuel en I avec le plan $(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ *d'un repère orthonormé direct* $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ *que l'on suppose galiléen. Le solide (S) est situé dans la région* $O_0z_0 \geq 0$*, le point O restant à la cote z = R dans (R_0).*

Q1-

Paramétrer la position de la demi-boule en utilisant les angles d'Euler.

Q2-

Construire les figures de calcul.

Q3-

Déterminer le vecteur instantané de rotation de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) et donner ses composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.

Q4-

Déterminer la condition géométrique de contact entre (S) et le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

Q5-

Quel est alors le nombre de degrés de liberté du système ?

Q6-

Calculer la vitesse du centre d'inertie G de (S) par ses composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.

Q7-

Calculer l'accélération du centre d'inertie G de (S) par ses composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.

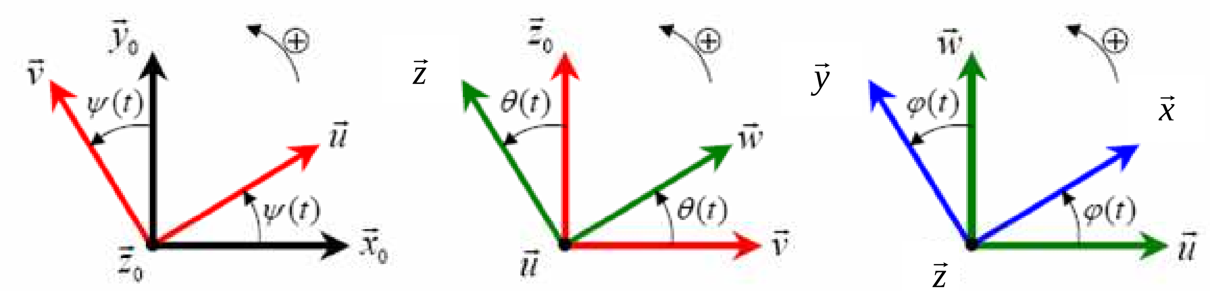
R1-

La position de (S) peut être définie par les coordonnées (x, y, z) de G dans (R_0) et par les angles d'Euler (ψ,θ,φ) *déterminés par la succession des repères orthonormés directs suivants :*

$$R'(G,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0) \xrightarrow{(\psi,\vec{z}_0)} R_1(G,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0) \xrightarrow{(\theta,\vec{u})} R_2(G,\vec{u},\vec{w},\vec{z}) \xrightarrow{(\varphi,\vec{z})} R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$

(R') a ses axes respectivement parallèles à ceux de (R_0) et de même sens.

R2-



R3-

Le vecteur instantané de rotation de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est donné par :

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(R/R_0) = \vec{\Omega}(R/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\varphi}\ \vec{z} + \dot{\theta}\ \vec{u} + \dot{\psi}\ \vec{z}_0}$$

Avec $R_1(G,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ *le premier repère intermédiaire et* $R_2(G,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ *est le deuxième repère intermédiaire.*

Soit :

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\ \vec{z}_0 + \dot{\theta}\ \vec{u} + \dot{\varphi}\ \vec{z}$$

Ou encore dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ *:*

$$\boxed{\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}}$$

R4-

Le contact géométrique en I est nécessairement traduit par une condition sur les paramètres de position $(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$. *Celle-ci est obtenue en exprimant que si le contact a lieu alors :*

$$\overrightarrow{O_0 I}.\vec{z}_0 = 0$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{O_0 G} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OI}).\vec{z}_0 = 0$$

$$\Rightarrow (x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0 + \frac{3R}{8}\vec{z} - R\vec{z}_0).\vec{z}_0 = 0$$

D'où :

$$\boxed{z = R(1 - \frac{3}{8}\cos\theta) \quad (L_g)}$$

R5-

La condition (L_g) obtenue dans la question 4- permet de réduire le nombre de paramètres de position indépendants de 6 à 5.

Le nombre de degrés de liberté du système est alors 5 qui sont $(x, y, \psi, \theta, \varphi)$.

R6-

$$\vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0 G}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \frac{3R}{8}\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0$$

$$= \dot{x}(\cos\psi\vec{u} - \sin\psi\cos\theta\vec{w} + \sin\psi\sin\theta\vec{z}) + \dot{y}(\sin\psi\vec{u} + \cos\psi\cos\theta\vec{w} - \cos\psi\sin\theta\vec{z})$$

$$+ \frac{3R}{8}\dot{\theta}\sin\theta(\sin\theta\vec{w} + \cos\theta\vec{z})$$

D'où :

$$\boxed{\vec{V}(G/R_0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi \\ -\dot{x}\sin\psi\cos\theta + \dot{y}\cos\psi\cos\theta + \frac{3R}{8}\dot{\theta}\sin^2\theta \\ \dot{x}\sin\psi\sin\theta - \dot{y}\cos\psi\sin\theta + \frac{3R}{8}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \end{Bmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}}$$

R7-

$$\vec{\gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{y}\vec{y}_0 + \frac{3R}{8}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{z}_0$$

$$= \ddot{x}(\cos\psi\vec{u} - \sin\psi\cos\theta\vec{w} + \sin\psi\sin\theta\vec{z}) + \ddot{y}(\sin\psi\vec{u} + \cos\psi\cos\theta\vec{w} - \cos\psi\sin\theta\vec{z})$$

$$+ \frac{3R}{8}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)(\sin\theta\vec{w} + \cos\theta\vec{z})$$

D'où :

$$\vec{\gamma}(G/R_0) = \underset{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}{\left\{\begin{array}{c} \ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi \\ -\ddot{x}\sin\psi\cos\theta + \ddot{y}\cos\psi\cos\theta + \dfrac{3R}{8}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\sin\theta \\ \ddot{x}\sin\psi\sin\theta - \ddot{y}\cos\psi\sin\theta + \dfrac{3R}{8}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\cos\theta \end{array}\right.}$$

Application pédagogique n° 2 : mouvement d'un système pendulaire

Notions abordées

- *Condition de roulement sans glissement*
- *Torseur cinématique*

Soit le système (S) constitué des deux solides suivants :

- *(D) est un disque de masse m_1, de centre C et de rayon R.*
- *(T) est une tige rectiligne de masse m_2, de centre d'inertie G et de longueur 2L.*

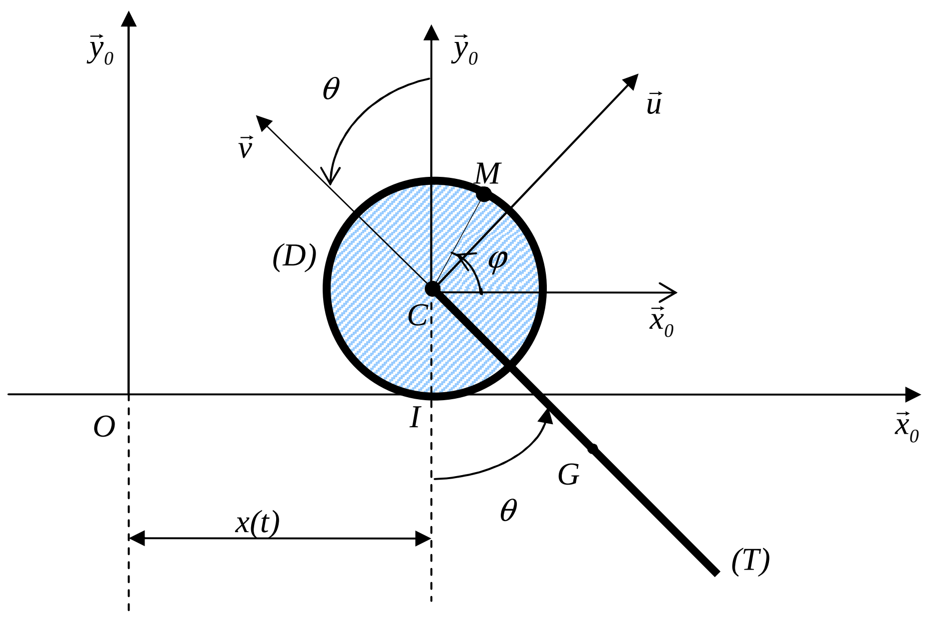
La tige (T) est articulée sur le disque (D) par une liaison rotoïde sans frottement d'axe $(C,\vec{z}_0)$.

Le disque (D) roule sans glisser sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$ *du repère de référence* $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

On notera I le point de (D) en contact avec l'axe $(O,\vec{x}_0)$.

Les paramètres la position de (S) sont :

- *x(t) l'abscisse du centre C de (D).*
- $\varphi(t)=(\vec{x}_0,\overrightarrow{CM})$ *où M est un point lié à (D) (voir figure)*
- $\theta(t)=(\vec{x}_0,\vec{u})=(\vec{y}_0,\vec{v})$.



Q1-

Montrer que la condition de roulement sans glissement au point I de (D) sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$ *est :*

$$\dot{x} + R\dot{\varphi} = 0$$

Dans la suite du problème cette relation sera prise en compte.

Q2-

Déterminer les élément de réduction en C du torseur cinématique de (D) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Q3-

Donner les élément de réduction en G du torseur cinématique de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0).

R1-

$$\vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{V}(C \in D/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{CI} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{\varphi}\vec{z}_0 \wedge (-R\vec{y}_0) = (\dot{x} + R\dot{\varphi})\vec{x}_0$$

La condition de roulement sans glissement impose :

$$\vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{0}$$

Soit :

$$\boxed{\dot{x} + R\dot{\varphi} = 0}$$

R2-

Les élément de réduction en C du torseur cinématique de (D) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$\boxed{[\vartheta(D/R_0)] = {}_C\begin{cases} \vec{\Omega}(D/R_0) \\ \vec{V}(C/R_0) \end{cases}}$$

Avec

$$\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\varphi}\vec{z}_0$$

Et

$$\vec{V}(C/R_0) = \left[\frac{\overrightarrow{OC}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{x}\vec{x}_0 = -R\dot{\varphi}\vec{x}_0$$

D'où :

$$\boxed{[\vartheta(D/R_0)] = {}_C\begin{cases} \vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\varphi}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(C/R_0) = -R\dot{\varphi}\vec{x}_0 \end{cases}}$$

R3-

Les élément de réduction en G du torseur cinématique de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$\left[\vartheta(T/R_0)\right]_G = \begin{cases} \vec{\Omega}(T/R_0) \\ \vec{V}(G/R_0) \end{cases}$$

Avec

$$\vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0$$

Et

$$\vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(C/R_0) + \vec{\Omega}(T/R_0) \wedge \overrightarrow{CG} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge (-L\vec{v}) = \dot{x}\vec{x}_0 + L\dot{\theta}\vec{u} = -R\dot{\varphi}\vec{x}_0 + L\dot{\theta}\vec{u}$$

D'où :

$$\boxed{\left[\vartheta(T/R_0)\right]_G = \begin{cases} \vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(G/R_0) = -R\dot{\varphi}\vec{x}_0 + L\dot{\theta}\vec{u} \end{cases}}$$