APPLICATIONS PEDAGOGIQUES-5

***

CINETIQUE

Rachid MESRAR

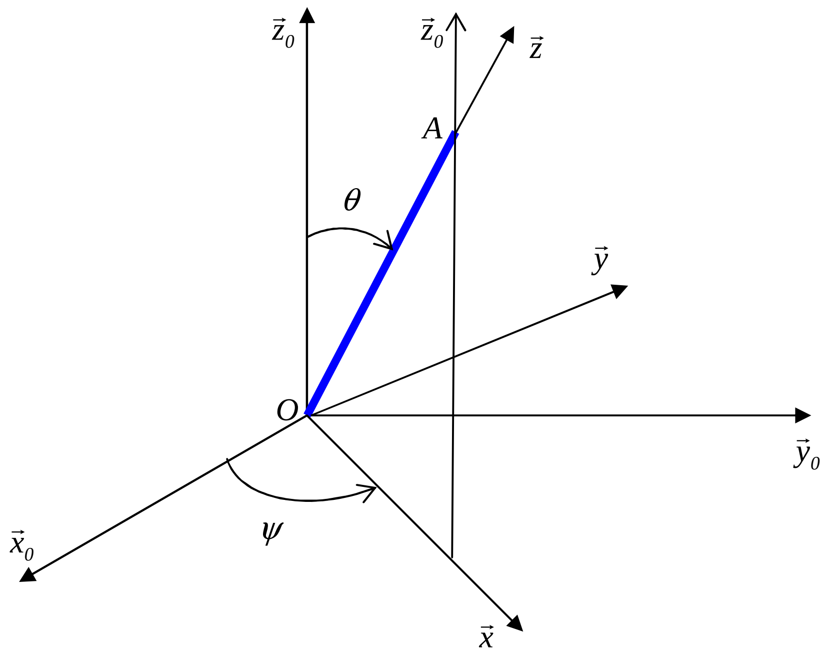
Application pédagogique n° 1 : mouvement d'une tige

Notions abordées

- Torseur cinématique
- Matrice d'inertie
- Torseur cinétique
- Torseur dynamique
- Energie cinétique

Soit un repère orthonormé direct $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ *par rapport auquel une tige rectiligne homogène (T) de masse m et de longueur l est en mouvement de telle sorte que :*

- L'une des extrémités reste constamment confondue avec le point O, l'autre étant notée A.
- OA tourne autour de l'axe $(O,\vec{z}_0)$ *et fait avec lui un angle* θ *tel que :* $\theta = (\overrightarrow{Oz_0},\overrightarrow{OA})$.
On note $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *le repère orthonormé direct lié à la tige de telle sorte que (T) soit porté par* $(O,\vec{z})$ *et* $\psi(t) = (\vec{x}_0,\vec{x})$



Q1- *Déterminer les éléments de réduction au point O du torseur cinématique* $[\mathscr{V}(T/R_0)]$ *associé au mouvement de (T) par rapport à* (R_0).

Q2- *Déterminer la matrice d'inertie en O de (T) relativement à la base* $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Q3- *Déterminer les éléments de réduction en O du torseur cinétique* $[\mathscr{C}(T/R_0)]$ *associé au mouvement de (T) par rapport à* (R_0).

Q4- *Déterminer les éléments de réduction en O du torseur dynamique* $[\mathscr{D}(T/R_0)]$ *associé au mouvement de (T) par rapport à* (R_0).

Q5- *Calculer l'énergie cinétique de (T) dans son mouvement par rapport à* (R_0).

Solution détaillée

R1-

Les éléments de réduction au point O du torseur cinématique $[\mathscr{V}(T/R_0)]$ *sont :*

$$[\vartheta(T/R_0)] = {}_O\begin{cases}\vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{y} \\ \vec{V}(O \in T/R_0) = \vec{0}\end{cases}$$

R2-

La matrice d'inertie en O de (T) relativement à la base $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{z})$ *est :*

$$M_O^{(T)} = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

En effet, si P est un point de (T) alors on a : P (0, 0, z). Par conséquent tous les produits d'inertie sont nuls et $C = I_{Oz} = 0$.
Par ailleurs :

$$A = B = \int_{P\in(T)} z^2 dm = \lambda \int_0^l z^2 dz = \frac{ml^2}{3} \quad car \;\; \lambda = \frac{m}{l}$$

R3-

Les éléments de réduction en O du torseur cinétique $[\mathscr{C}(T/R_0)]$ *associé au mouvement de (T) par rapport à* (R_0) *sont :*

$$[C(T/R_0)] = {}_O\begin{cases} m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_O(T/R_0)\end{cases}$$

Avec :

$$\vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} = \frac{l}{2}\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{R_0} = \frac{l}{2}(\dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{y}) \wedge \vec{z} = \frac{l}{2}\dot{\psi}(\vec{z}_0 \wedge \vec{z}) + \frac{l}{2}\dot{\theta}(\vec{y} \wedge \vec{z})$$

$$= \frac{l}{2}\dot{\psi}\sin\theta\vec{y} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\vec{x}$$

Et

$$\vec{\sigma}_O(T/R_0) = M_O^{(T)}\vec{\Omega}(T/R_0)$$

Avec

$$\vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{y} = \dot{\psi}(\cos\theta\vec{z} - \sin\theta\vec{x}) = -\dot{\psi}\sin\theta\vec{x} + \dot{\theta}\vec{y} + \dot{\psi}\cos\theta\vec{z}$$

D'où :

$$\vec{\sigma}_O(T/R_0) = M_O^{(T)}\vec{\Omega}(T/R_0) = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{\sigma}_O(T/R_0) = -\frac{ml^2}{3}\dot{\psi}\sin\theta\vec{x} + \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\vec{y}}$$

R4-

Les éléments de réduction en O du torseur dynamique $[\mathscr{D}(T/R_0)]$ *associé au mouvement de (T) par rapport à (R_0) sont donnés par :*

$$[\mathscr{D}(T/R_0)] = \left\{\begin{matrix} m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_O(T/R_0) \end{matrix}\right._O$$

Avec

$$\vec{\Gamma}(G/R_0)=\left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\left(\frac{l}{2}\dot{\psi}\sin\theta\vec{y}+\frac{l}{2}\dot{\theta}\vec{x}\right)}{dt}\right]_{R_0}$$

$$=\frac{l}{2}(\ddot{\psi}\sin\theta+\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{y}+\frac{l}{2}\dot{\psi}\sin\theta\left[\frac{d\vec{y}}{dt}\right]_{R_0}+\frac{l}{2}\ddot{\theta}\vec{x}+\frac{l}{2}\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{x}}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\begin{cases}\left[\dfrac{d\vec{y}}{dt}\right]_{R_0}=\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{y}=\begin{pmatrix}-\dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dot{\psi}\cos\theta\\0\\-\dot{\psi}\sin\theta\end{pmatrix}\\[2ex] \left[\dfrac{d\vec{x}}{dt}\right]_{R_0}=\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{x}=\begin{pmatrix}-\dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dot{\psi}\cos\theta\\-\dot{\theta}\end{pmatrix}\end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(G/R_0)=\frac{l}{2}(\ddot{\theta}-\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{x}+\frac{l}{2}(\ddot{\psi}\sin\theta+2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{y}-\frac{l}{2}(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)\vec{z}}$$

Et

$$\vec{\delta}_O(T/R_0)=\left[\frac{d\vec{\sigma}_O(T/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\vec{\sigma}_O(T/R_0)}{dt}\right]_{R}+\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{\sigma}_O(T/R_0)$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_O(T/R_0)}{dt}\right]_{R}=-\frac{ml^2}{3}(\ddot{\psi}\sin\theta+\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{x}+\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\vec{y}$$

$$\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{\sigma}_O(T/R_0)=\begin{pmatrix}-\dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\frac{ml^2}{3}\dot{\psi}\sin\theta\\ \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\\ -\frac{ml^2}{3}\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

D'où :

$$\vec{\delta}_O(T/R_0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{ml^2}{3}(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) \\ \dfrac{ml^2}{3}\ddot{\theta} - \dfrac{ml^2}{3}\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

R5-

L'énergie cinétique de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$T(T/R_0) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(O/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(T/R_0)M_O^{(T)}\vec{\Omega}(T/R_0)$$

$$= 0 + \frac{1}{2}(-\dot{\psi}\sin\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}\cos\theta)\begin{pmatrix} \dfrac{ml^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ml^2}{6}(\dot{\psi}\sin\theta)^2 + \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2$$

D'où :

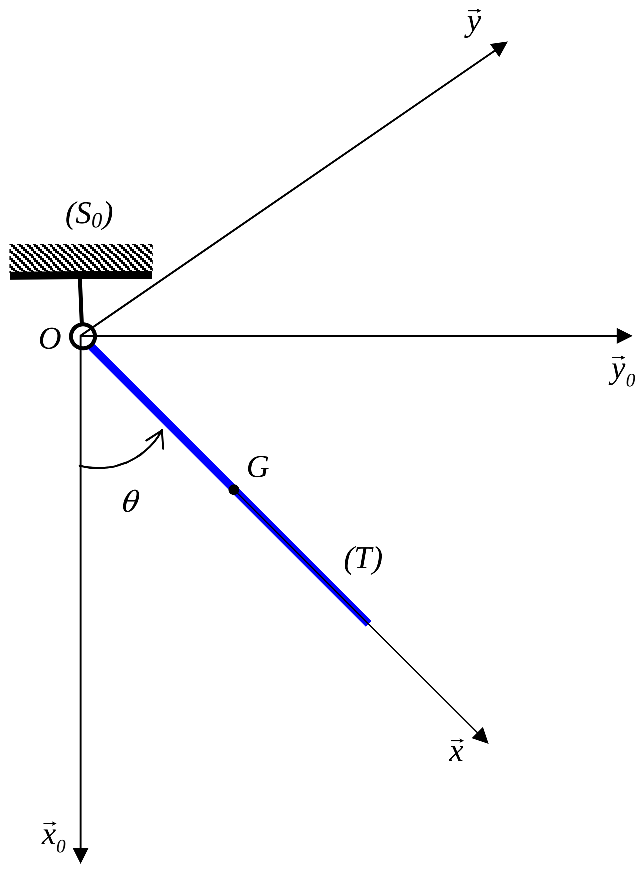
$$T(T/R_0) = \frac{ml^2}{6}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta)$$

Application pédagogique n° 2 : mouvement d'un pendule simple

Notions abordées

- Torseur cinématique
- Torseur cinétique
- Torseur dynamique
- Energie cinétique

Considérons un pendule simple constitué d'une tige rectiligne (T) de longueur l, homogène , de masse m et de centre d'inertie G.



Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct lié à un bâti (S_0). La tige (T) a une liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec (S_0). Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à (T) tel que :

$\overrightarrow{OG} = \frac{l}{2}\vec{x}$ et $\theta = (\vec{x}_0,\vec{x})$.

Q1- *Déterminer le torseur cinématique en O de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q2- *Déterminer le torseur cinématique en G de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q3- *Déterminer par deux méthodes différentes le torseur cinétique en O de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q4- *Déterminer de deux manières différentes le torseur cinétique en G de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q5- *Déterminer le torseur dynamique en O de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q6- *Déterminer par deux méthodes différentes le torseur dynamique en G de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Q7- *Calculer de deux manières différentes l'énergie cinétique de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0).*

Solution détaillée

R1-

Le torseur cinématique en O de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[\vartheta(T/R_0)] = {}_O\begin{cases}\vec{\Omega}(T/R_0)=\dot{\theta}\vec{z}_0\\ \vec{V}(O/R_0)=\vec{0}\end{cases}$$

R2-

Le torseur cinématique en G de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[\vartheta(T/R_0)] = {}_G\begin{cases}\vec{\Omega}(T/R_0)=\dot{\theta}\vec{z}_0\\ \vec{V}(G/R_0)\end{cases}$$

Avec $\vec{V}(G/R_0)=\left[\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0}=\dfrac{l}{2}\left[\dfrac{d\vec{x}}{dt}\right]_{R_0}=\dfrac{l}{2}(\vec{\Omega}(T/R_0)\wedge\vec{x})=\dfrac{l}{2}(\dot{\theta}\vec{z}_0\wedge\vec{x})=\dfrac{l}{2}\dot{\theta}\vec{y}$

D'où :

$$[\vartheta(T/R_0)] = {}_G\begin{cases}\vec{\Omega}(T/R_0)=\dot{\theta}\vec{z}_0\\ \vec{V}(G/R_0)=\dfrac{l}{2}\dot{\theta}\vec{y}\end{cases}$$

R3-

Le torseur cinétique en O de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[C(T/R_0)] = {}_O\begin{cases}m\vec{V}(G/R_0)\\ \vec{\sigma}_O(T/R_0)\end{cases}$$

Calcul du moment cinétique $\vec{\sigma}_O(T/R_0)$:

Première méthode :

$$\vec{\sigma}_O(T/R_0) = \int_{P\in(T)} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}(P/R_0)dm$$

Soit P un point appartenant à (T) alors $\overrightarrow{OP} = x\vec{x}$ *et par suite on a :*

$$\vec{V}(P/R_0) = \underbrace{\vec{V}(O/R_0)}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(T/R_0) \wedge \overrightarrow{OP} = \dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge x\vec{x} = x\dot{\theta}\vec{y}$$

Donc on a :

$$\vec{\sigma}_O(T/R_0) = \int_{P\in(T)} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}(P/R_0)dm = \int_{P\in(T)} (x\vec{x} \wedge x\dot{\theta}\vec{y})dm = \dot{\theta}\vec{z}_0 \int_{P\in(T)} x^2 dm$$

Sachant que $dm = \lambda dx = \dfrac{m}{l}dx$ *où* λ *est la densité linéique de (T) :*

$$\vec{\sigma}_O(T/R_0) = \frac{m}{l}\dot{\theta}\vec{z}_0 \int_0^l x^2 dx = \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\vec{z}_0$$

Deuxième méthode : Plus simple

$$\vec{\sigma}_O(T/R_0) = \left[M_O^{(T)}\right]\left[\vec{\Omega}(T/R_0)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{ml^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\vec{z}_0$$

D'où :

$$[C(T/R_0)] = \left\{ \begin{array}{l} m\vec{V}(G/R_0) = m\dfrac{l}{2}\dot{\theta}\vec{y} \\ \vec{\sigma}_O(T/R_0) = \dfrac{ml^2}{3}\dot{\theta}\vec{z}_0 \end{array} \right._O$$

R4-

Le torseur cinétique en G de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[C(T/R_0)]_G = \begin{cases} m\vec{V}(G/R_0) = m\dfrac{l}{2}\dot{\theta}\vec{y} \\ \vec{\sigma}_G(T/R_0) \end{cases}$$

Calcul du moment cinétique $\vec{\sigma}_G(T/R_0)$ **:**

Première méthode :

$$\vec{\sigma}_G(T/R_0) = \vec{\sigma}_O(T/R_0) + m\vec{V}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{OG} = \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\vec{z}_0 + m\frac{l}{2}\dot{\theta}\vec{y} \wedge \frac{l}{2}\vec{x} = \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\vec{z}_0 - \frac{ml^2}{4}\dot{\theta}\vec{z}_0 = \frac{ml^2}{12}\dot{\theta}\vec{z}_0$$

Deuxième méthode :

$$\vec{\sigma}_G(T/R_0) = \left[M_G^{(T)}\right]\left[\vec{\Omega}(T/R_0)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{ml^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{ml^2}{12}\dot{\theta}\vec{z}_0$$

D'où :

$$\boxed{[C(T/R_0)]_G = \begin{cases} m\vec{V}(G/R_0) = m\dfrac{l}{2}\dot{\theta}\vec{y} \\ \vec{\sigma}_G(T/R_0) = \dfrac{ml^2}{12}\dot{\theta}\vec{z}_0 \end{cases}}$$

R5-

Le torseur dynamique en O de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[D(T/R_0)]_O = \begin{cases} m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_0(T/R_0) \end{cases}$$

Calcul de la résultante dynamique

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\vec{y}\right)\right]_{R_0} = \frac{l}{2}\left[\ddot{\theta}\vec{y} + \dot{\theta}\left[\frac{d\vec{y}}{dt}\right]_{R_0}\right] = \frac{l}{2}\left[\ddot{\theta}\vec{y} + \dot{\theta}(\dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge \vec{y})\right] = \frac{l}{2}\left[\ddot{\theta}\vec{y} - \dot{\theta}^2\vec{x}\right]$$

D'où :

$$m\vec{\Gamma}(G/R_0)=\frac{ml}{2}\left[\ddot{\theta}\vec{y}-\dot{\theta}^2\vec{x}\right]$$

Calcul du moment dynamique au point O

Le point O étant fixe dans (R_0), il vient :

$$\vec{\delta}_0(T/R_0)=\left[\frac{d\vec{\sigma}_O(T/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\vec{z}_0$$

D'où :

$$[D(T/R_0)]=_O\begin{cases} m\vec{\Gamma}(G/R_0)=\frac{ml}{2}\left[\ddot{\theta}\vec{y}-\dot{\theta}^2\vec{x}\right] \\ \vec{\delta}_0(T/R_0)=\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\vec{z}_0 \end{cases}$$

R6-

Le torseur dynamique en G de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[D(T/R_0)]=_G\begin{cases} m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_G(T/R_0) \end{cases}$$

Calcul du moment dynamique au point G

Première méthode

G étant le centre d'inertie de (T), il vient

$$\vec{\delta}_G(T/R_0)=\left[\frac{d\vec{\sigma}_G(T/R_0)}{dt}\right]_{R_0}=\frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}\vec{z}_0$$

Deuxième méthode :

$$\vec{\delta}_G(T/R_0)=\vec{\delta}_O(T/R_0)+m\vec{\Gamma}(G/R_0)\wedge\overrightarrow{OG}$$

$$=\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\vec{z}_0+\frac{ml}{2}\left[\ddot{\theta}\vec{y}-\dot{\theta}^2\vec{x}\right]\wedge\frac{l}{2}\vec{x}=\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\vec{z}_0-\frac{ml^2}{4}\ddot{\theta}\vec{z}_0=\frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}\vec{z}_0$$

D'où :

$$[D(T/R_0)] = {}_G\left\{\begin{array}{l} m\vec{\Gamma}(G/R_0) = \dfrac{ml}{2}\left[\ddot{\theta}\vec{y} - \dot{\theta}^2\vec{x}\right] \\ \vec{\delta}_G(T/R_0) = \dfrac{ml^2}{12}\ddot{\theta}\vec{z}_0 \end{array}\right.$$

R7-

Calcul de l'énergie cinétique de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0):

Première méthode :

$$T(T/R_0) = \frac{1}{2}\int_{P\in(T)} \vec{V}^2(P/R_0)dm \quad \text{avec} \quad \vec{V}(P/R_0) = x\dot{\theta}\vec{y}$$

Ce qui donne :

$$T(T/R_0) = \frac{\theta^2}{2}\int_{P\in(T)} x^2 dm$$

Or $dm = \lambda dx = \dfrac{m}{l}dx \Rightarrow T(T/R_0) = \dfrac{m\dot{\theta}^2}{2l}\displaystyle\int_0^l x^2 dx = \dfrac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2$

Deuxième méthode :

En utilisant le comoment des torseurs cinématiques et cinétique de (T) dans son mouvement par rapport à (R_0) :

$$2T(T/R_0) = [\mathscr{V}(T/R_0)]_O.[\mathscr{C}(T/R_0)]_O = {}_O\left\{\begin{array}{l} \vec{\Omega}(T/R_0) = \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(O/R_0) = \vec{0} \end{array}\right. \cdot {}_O\left\{\begin{array}{l} m\vec{V}(G/R_0) = m\dfrac{l}{2}\dot{\theta}\vec{y} \\ \vec{\sigma}_O(T/R_0) = \dfrac{ml^2}{3}\dot{\theta}\vec{z}_0 \end{array}\right.$$

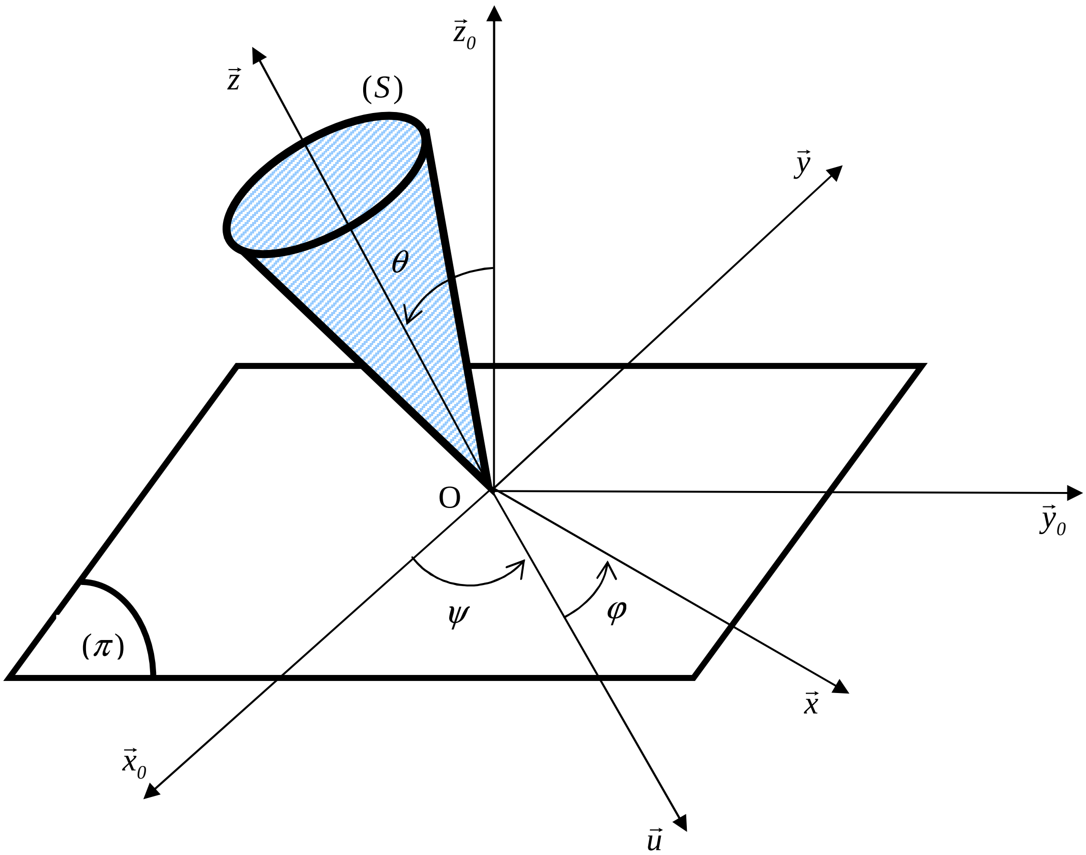
$$= \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2$$

D'où :

$$\boxed{T(T/R_0) = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2}$$

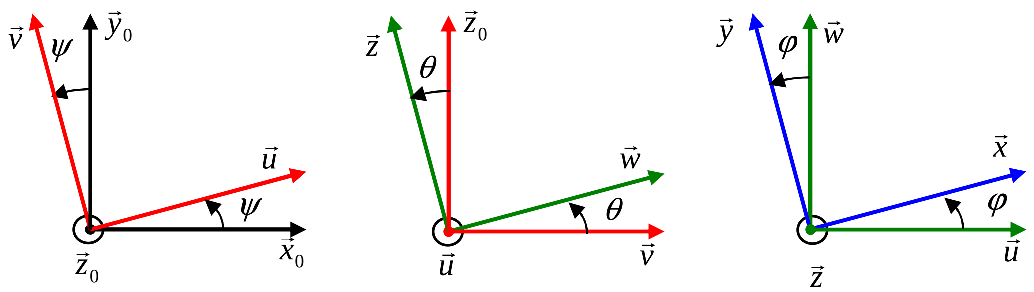
Application pédagogique n° 3 : cône en mouvement sur un plan

On considère un cône (S) d'axe de symétrie de révolution $(O,\vec{z})$ *dont le point O reste immobile sur un plan* (π).



Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ *un repère orthonormé direct lié à* (π) *dont l'axe* $(O,\vec{z}_0)$ *est dirigé suivant la verticale ascendante. Soit* $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *un repère lié à (S).*

La position de la base de (R) par rapport à la base de (R_0) est définie par les trois angles d'Euler (ψ,θ,φ).



1- Montrer que la matrice d'inertie de (S) au point O est de la forme :

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

2- Déterminer le moment cinétique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).
3- Déterminer le moment dynamique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).
4- Calculer l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).

Solution détaillée

1- La forme de la matrice d'inertie de (S) en O se justifie par le fait que l'axe $(O,\vec{z})$ *est un axe de symétrie de révolution. Par ailleurs cette forme est valable pour toute base se terminant par* $\vec{z}$ *, c'est le cas par exemple des bases* $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *et* $(\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ *(deuxième base intermédiaire).*

2- Le moment cinétique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = M_O^{(S)}.\vec{\Omega}(S/R)$$

Avec

$$\vec{\Omega}(S/R) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$$

D'où :

$$\vec{\sigma}_O(S/R) = M_O^{(S)}.\vec{\Omega}(S/R) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= A\dot{\theta}\vec{u} + A\dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$$

3- Le moment dynamique au point O de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\vec{\delta}_O(S/R) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R)}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R)}{dt}\right]_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})} + \vec{\Omega}((\vec{u},\vec{w},\vec{z})/R) \wedge \vec{\sigma}_O(S/R)$$

Avec

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R)}{dt}\right]_R = A\ddot{\theta}\vec{u} + A(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{w} + C(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\vec{z}$$

Et

$$\vec{\Omega}((\vec{u},\vec{w},\vec{z})/R)\wedge\vec{\sigma}_O(S/R)=\begin{vmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}A\dot{\theta}\\ A\dot{\psi}\sin\theta\\ C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)-A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\\ A\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta-C\dot{\theta}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\\ 0\end{vmatrix}$$

D'où :

$$\vec{\delta}_O(S/R)=\begin{vmatrix}A\ddot{\theta}+C\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)-A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\\ A\ddot{\psi}\sin\theta+2A\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta-C\dot{\theta}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\\ C(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\end{vmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

4- L'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$T(S/R)=\underbrace{\frac{1}{2}m\vec{V}^2(O/R_0)}_{\vec{0}}+\frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(S/R)M_O^{(S)}\vec{\Omega}(S/R)$$

$$=\frac{1}{2}(\dot{\theta},\dot{\psi}\sin\theta,\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\begin{pmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\frac{A}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)+\frac{C}{2}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2$$