MECANIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE

SM3-SMI3-ERDD3

Rachid MESRAR

Professeur de l'enseignement supérieur
Département de physique
Faculté des sciences
Agadir

email: r.mesrar@uiz.ac.ma

CHAPITRE 4 : CINETIQUE

« La cinétique est définie à partir de la cinématique en introduisant la notion de masse »

CINETIQUE = CINEMATIQUE + MASSE

CHAPITRE 4 : CINETIQUE

Objectifs

- ☞ Préparer le terrain pour le principe fondamental de la dynamique
- ☞ Modéliser les trois grandeurs suivantes:
  - La quantité de mouvement d'un solide
  - La quantité d'accélération d'un solide
  - L'énergie cinétique d'un solide
- ☞ Savoir calculer les moments cinétique et dynamique d'un système mécanique

CHAPITRE 4 : CINETIQUE

Notions abordées

- Principe de conservation de la masse
- Résultante cinétique
- Moment cinétique
- Loi de transport des moments cinétiques
- Théorème de Koenig
- Torseur cinétique
- Moment cinétique d'un solide en l'un des ses points
- Résultante dynamique

CHAPITRE 4 : CINETIQUE

Notions abordées - Suite

- ☞ Moment dynamique
- ☞ Loi de transport des moments dynamiques
- ☞ Théorème de Koenig
- ☞ Torseur dynamique
- ☞ Relation entre les torseurs cinétique et dynamique
- ☞ Energie cinétique - Théorème de Koenig
- ☞ Eléments cinétiques d'un système matériel

CHAPITRE 4 : CINETIQUE

PLAN DU COURS

1- TORSEUR CINETIQUE
2- TORSEUR DYNAMIQUE
3- RELATION ENTRE LES TORSEURS CINETIQUE ET DYNAMIQUE
4- MOMENT CINETIQUE D’UN SOLIDE EN L’UN DE SES POINTS
5- ENERGIE CINETIQUE
6- ELEMENTS CINETIQUES D’UN SYSTEME DE SOLIDES

1- TORSEUR CINETIQUE

1-1- PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA MASSE

☞

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{P\in(\Sigma)} \vec{F}(P,t)dm\right] = \int_{P\in(\Sigma)} \frac{d\vec{F}(P,t)}{dt}dm$$

1-2-TORSEUR CINETIQUE D'UN SYSTEME MATERIEL

☞

$$[C(\Sigma/R_0)] = {}_A\left\{\begin{array}{l} \vec{R}_C = \int_{P\in(\Sigma)} \vec{V}(P/R_0)dm \\ \vec{\sigma}_A(\Sigma/R_0) = \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R_0)dm \end{array}\right.$$

1-3-DETERMINATION DE LA RESULTANTE CINETIQUE

$$\vec{R}_C = \int_{P\in(\Sigma)} \vec{V}(P/R_0)dm = \int_{P\in(\Sigma)} \left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_{R_0} dm$$

D'après le principe de conservation de la masse:

$$\vec{R}_C = \left[\frac{d\left(\displaystyle\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{OP}dm\right)}{dt}\right]$$

Or

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{OP}dm$$

Ce qui donne

$$\vec{R}_C = m\left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0}$$

D'où :

☞ $$\boxed{\vec{R}_C = m\vec{V}(G/R_0)}$$

1-4- DETERMINATION DU MOMENT CINETIQUE

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma / R_0) = \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P / R_0)dm = \int_{P\in(\Sigma)} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \wedge \vec{V}(P / R_0)dm$$

$$= \underbrace{\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}(P / R_0)dm}_{\vec{\sigma}_B(\Sigma / R_0)} + \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}(P / R_0)dm$$

Or le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ne dépend pas du point d'intégration courant P

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma / R_0) = \vec{\sigma}_B(\Sigma / R_0) + \overrightarrow{AB} \wedge \underbrace{\int_{P\in(\Sigma)} \vec{V}(P / R_0)dm}_{\vec{R}_C}$$

D'où la loi de transport des moments cinétiques :

☞

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma / R_0) = \vec{\sigma}_B(\Sigma / R_0) + m\vec{V}(G / R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Conclusion

☞

$$[C(\Sigma/R_0)]_A = \begin{cases} \vec{R}_C = \displaystyle\int_{P\in(\Sigma)} \vec{V}(P/R_0)dm = m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_A(\Sigma/R_0) = \displaystyle\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R_0)dm = \vec{\sigma}_B(\Sigma/R_0) + m\vec{V}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{BA} \end{cases}$$

1-5-THEOREME DE KOENIG POUR LE MOMENT CINETIQUE

En appliquant la loi de transport des moments cinétiques entre un point A et le centre d'inertie G du système, il vient:

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma / R_0) = \vec{\sigma}_G(\Sigma / R_0) + \underbrace{m\vec{V}(G / R_0) \wedge \overrightarrow{AG}}$$

« Moment cinétique en A de la masse concentrée m centrée en G »

Cette relation porte le nom de théorème de Koenig pour le moment cinétique.

2- TORSEUR DYNAMIQUE

2-1- TORSEUR DYNAMIQUE D'UN SYSTEME MATERIEL

$$\left[D(\Sigma / R_0)\right]_A = \begin{cases} \vec{R}_D = \displaystyle\int_{P\in(\Sigma)} \vec{\Gamma}(P / R_0)dm \\ \vec{\delta}_A(\Sigma / R_0) = \displaystyle\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P / R_0)dm \end{cases}$$

2-2- DETERMINATION DE LA RESULTANTE DYNAMIQUE

$$\vec{R}_D = \int_{P\in(\Sigma)} \vec{\Gamma}(P / R_0)dm = \int_{P\in(\Sigma)} \left[\frac{d\vec{V}(P / R_0)}{dt}\right]_{R_0} dm$$

$$\vec{R}_D = \left[\frac{d\left(\displaystyle\int_{P\in(\Sigma)} \vec{V}(P/R_0)\,dm \right)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{R}_C}{dt} \right]_{R_0} = m\left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

D'où :

☞

$$\boxed{\vec{R}_D = m\vec{\Gamma}(G/R_0)}$$

2-3- DETERMINATION DU MOMENT DYNAMIQUE

$$\vec{\delta}_A(\Sigma/R_0) = \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0)dm = \int_{P\in(\Sigma)} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0)dm$$

$$= \underbrace{\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0)dm}_{\vec{\delta}_B(\Sigma/R_0)} + \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0)dm$$

Or le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ne dépend pas du point d'intégration courant P :

$$\vec{\delta}_A(\Sigma/R_0) = \vec{\delta}_B(\Sigma/R_0) + \overrightarrow{AB} \wedge \underbrace{\int_{P\in(\Sigma)} \vec{\Gamma}(P/R_0)dm}_{\vec{R}_D}$$

D'où la loi de transport des moments dynamiques:

☞

$$\boxed{\vec{\delta}_A(\Sigma / R_0) = \vec{\delta}_B(\Sigma / R_0) + m\vec{\Gamma}(G / R_0) \wedge \overrightarrow{AB}}$$

Conclusion

☞

$$\boxed{\left[D(\Sigma/R_0)\right]_A = \begin{cases} \vec{R}_D = \displaystyle\int_{P\in(\Sigma)} \vec{\Gamma}(P/R_0)dm = m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_A(\Sigma/R_0) = \displaystyle\int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0)dm = \vec{\delta}_B(\Sigma/R_0) + m\vec{\Gamma}(G/R_0) \wedge \overrightarrow{BA} \end{cases}}$$

2-4-THEOREME DE KOENIG POUR LE MOMENT DYNAMIQUE

En appliquant la loi de transport des moments dynamiques entre un point A et le centre d'inertie G du système, il vient:

$$\vec{\delta}_A(\Sigma / R_0) = \vec{\delta}_G(\Sigma / R_0) + \underbrace{m\vec{\Gamma}(G / R_0) \wedge \overrightarrow{AG}}$$

« Moment dynamique en A de la masse concentrée m centrée en G »

Cette relation porte le nom de théorème de Koenig pour le moment dynamique.

3- RELATION ENTRE LES TORSEURS CINETIQUE ET DYNAMIQUE

3-1- RELATION ENTRE LES RESULTANTES CINETIQUE ET DYNAMIQUE

$$\begin{cases} \vec{R}_C = m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{R}_D = m\vec{\Gamma}(G/R_0) \end{cases}$$

Or

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R_0}$$

D'après le principe de conservation de la masse :

☞

$$\boxed{\vec{R}_D = \left[\frac{d\vec{R}_C}{dt}\right]_{R_0}}$$

3-2- RELATION ENTRE LES MOMENTS CINETIQUE ET DYNAMIQUE

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma/R_0) = \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R_0)dm = \int_{P\in(\Sigma)} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) \wedge \vec{V}(P/R_0)dm$$

Par dérivation, il vient :

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_A(\Sigma/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \int_{P\in(\Sigma)} \left[\left(\vec{V}(P/R_0) - \vec{V}(A/R_0)\right) \wedge \vec{V}(P/R_0) + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0)\right]dm$$

$$= -\vec{V}(A/R_0) \wedge \int_{P\in(\Sigma)} \vec{V}(P/R_0)dm + \int_{P\in(\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0)dm$$

$$= -\vec{V}(A/R_0) \wedge m\vec{V}(G/R_0) + \vec{\delta}_A(\Sigma/R_0)$$

D'où :

$$\boxed{\vec{\delta}_A(\Sigma/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_A(\Sigma/R_0)}{dt}\right]_{R_0} + \vec{V}(A/R_0) \wedge m\vec{V}(G/R_0)}$$

Cas particuliers très importants car fréquemment rencontrés :

- *Cas où le point A est fixe dans (R_0):*

☞

$$\vec{\delta}_A(\Sigma / R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_A(\Sigma / R_0)}{dt}\right]_{R_0}$$

- *Cas où le point A est confondu avec G:*

☞

$$\vec{\delta}_G(\Sigma / R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(\Sigma / R_0)}{dt}\right]_{R_0}$$

4-MOMENT CINETIQUE D'UN SOLIDE EN L'UN DE SES POINTS

1- THEOREME

Soit (S) un solide de masse m, de centre d'inertie G et soit A un point appartenant à (S) et (R_0) un repère orthonormé direct, alors :

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/R_0) + M_A^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Démonstration

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0) = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R_0)dm$$

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(P/R_0) \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\forall P \in (S)$$

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0) = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AP})dm$$

$$= \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(A/R_0)dm + \int_{M\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AP})dm$$

$$= \left(\int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP}dm \right) \wedge \vec{V}(A/R_0) + M_A^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$= m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/R_0) + M_A^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

2- CAS PARTICULIERS TRES IMPORTANTS

- Cas où le point A est fixe dans (R_0):

☞ $$\boxed{\vec{\sigma}_A(S/R_0) = M_A^{(S)}\,\vec{\Omega}(S/R_0)}$$

- Cas où le point A est confondu avec le centre d'inertie G :

☞ $$\boxed{\vec{\sigma}_G(S/R_0) = M_G^{(S)}\,\vec{\Omega}(S/R_0)}$$

5- ENERGIE CINETIQUE

5-1- ENERGIE CINETIQUE D'UN SYSTEME MATERIEL

☞

$$T(\Sigma / R_0) = \frac{1}{2} \int_{P \in (\Sigma)} \vec{V}^{\,2}(P / R_0)\, dm$$

5-2- EXPRESSION DE L'ENERGIE CINETIQUE EN FONCTION DES TORSEURS CINEMATIQUE ET CINETIQUE

☞

$$2T(S/R_0) = \left[C(S/R_0)\right] \otimes \left[\vartheta(S/R_0)\right]$$

Démonstration

$$2T(S/R_0) = \int_{P\in(S)} \vec{V}^2(P/R_0)\,dm$$

$$= \int_{P\in(S)} \left[\left(\vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AP}\right)\vec{V}(P/R_0)\right] dm$$

$$= \int_{P\in(S)} \vec{V}(A/R_0)\vec{V}(P/R_0)\,dm + \int_{P\in(S)} (\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AP})\vec{V}(P/R_0)\,dm$$

$$= \vec{V}(A/R_0) \int_{P\in(S)} \vec{V}(P/R_0)\,dm + \int_{P\in(S)} (\vec{V}(P/R_0), \vec{\Omega}(S/R_0), \overrightarrow{AP})\,dm$$

$(car\ \vec{V}(A/R_0)\ est\ indépendante\ du\ point\ courant\ P)$

$$=\vec{V}(A/R_0)\left(m\vec{V}(G/R_0)\right)+\vec{\Omega}(S/R_0)\int_{P\in(S)}(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(M/R_0))dm$$

$$=\vec{V}(A/R_0)\left(m\vec{V}(G/R_0)\right)+\int_{P\in(S)}(\vec{\Omega}(S/R_0),\overrightarrow{AP},\vec{V}(P/R_0))dm$$

$$=\vec{V}(A/R_0)\left(m\vec{V}(G/R_0)\right)+\vec{\Omega}(S/R_0).\vec{\sigma}_A(S/R_0)$$

$$=\ _A\begin{Bmatrix} m\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_A(S/R_0) \end{Bmatrix}\otimes\ _A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A/R_0) \end{Bmatrix}$$

Remarque importante

La valeur de l'énergie cinétique est indépendante du point de calcul A car le comoment de deux torseurs est invariant. Il est donc recommandé de choisir un point A qui rend le calcul plus facile : point fixe dans (R_0) ou point coïncidant avec le centre d'inertie G.

5-3- ENERGIE CINETIQUE D'UN SOLIDE INDEFORMABLE

☞

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 (A/R_0) + \frac{1}{2} {}^T\vec{\Omega}(S/R_0) M_A^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0)$$
$$+ m\vec{\Omega}(S/R_0).\left[\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/R_0)\right]$$

Pour la démonstration voir cours polycopié

5-4- CAS PARTICULIERS TRES IMPORTANTS

- Cas où le point A est fixe dans (R_0):

☞

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(S/R_0)M_A^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

- Cas où le point A est confondu avec le centre d'inertie G:

« Energie cinétique de la masse concentrée m centrée en G »

☞

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(G/R_0) + \frac{1}{2}{}^T\vec{\Omega}(S/R_0)M_G^{(S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique

6- ELEMENTS CINETIQUES D'UN SYSTEME DE SOLIDES

6-1- TORSEUR CINETIQUE

$$\left[C(\Sigma / R_0)\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[C(S_i / R_0)\right]$$

Avec

$$\begin{cases} \vec{R}_C(\Sigma / R_0) = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_C(S_i / R_0) \\ \vec{\sigma}_A(\Sigma / R_0) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\sigma}_A(S_i / R_0) \end{cases}$$

6-2- TORSEUR DYNAMIQUE

☞

$$\left[D(\Sigma / R_0)\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[D(S_i / R_0)\right]$$

Avec

☞

$$\vec{R}_D(\Sigma / R_0) = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_D(S_i / R_0)$$

$$\vec{\delta}_A(\Sigma / R_0) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\delta}_A(S_i / R_0)$$

6-3- ENERGIE CINETIQUE

☞

$$T(\Sigma / R_0) = \sum_{i=1}^{n} T(S_i / R_0)$$

FIN DU CHAPITRE 4

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Rachid MESRAR

Professeur de l'enseignement supérieur
Département de physique
Faculté des sciences
Agadir
email: r.mesrar@uiz.ac.ma