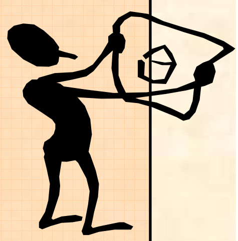
Enoncés des exercices
TECHNIQUES ET METHODES
Calcul intégral.

Calcul intégral
Énoncés des exercices de 1 à 4

Enoncé: *Calculer les intégrales I, J, K.*

1) $$I=\int_0^1 \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+5}}dx$$



2) $$J=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^3 x\sin x dx$$

3) $$K=\int_1^3 \frac{10x-3}{5x^2-3x+8}dx$$

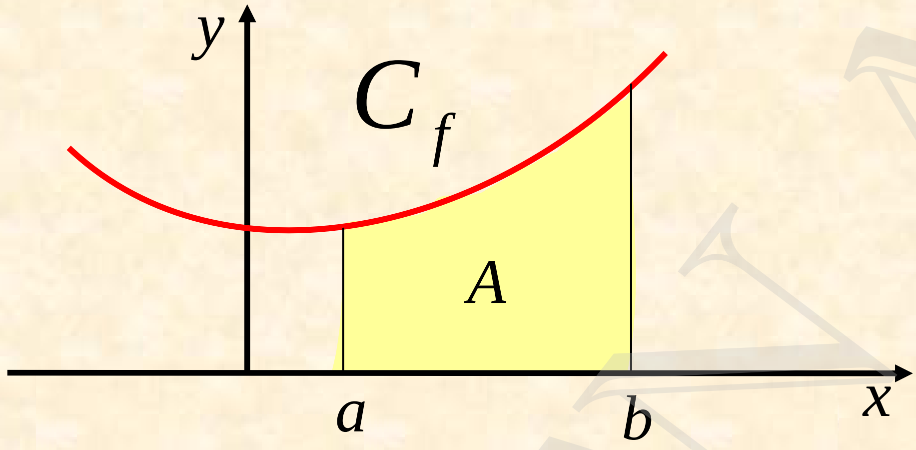
4) *Soit f la fonction:*

$$f: x \to \frac{3}{x^2}\times e^{\left(\frac{4}{x}\right)}$$

(L'unité graphique est 2 cm)
Déterminer l'aire (L) du domaine du plan compris entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

Vulgarisation
Pour comprendre
Primitives et calcul intégral

Le calcul intégral



L'aire du domaine du plan compris entre la courbe (C_f) représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations x = a et x = b, s'écrit :

Se lit: « L'aire est égale à l'intégrale de f(x) dx entre les bornes a et b » (dx étant la notation infinitésimale)

1

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

2

L'aire est égale à la primitive F de f prise entre les bornes a et b. (a et b appartenant à I l'intervalle considéré sur lequel f doit être continue)

$$A=\boxed{\left[F(x)\right]_a^b}$$

*F étant une primitive de **f** sur l'intervalle considéré, le chapitre consacré à la recherche d'une (ou des) primitive(s) F de f permet de passer de 1 à 2.*

L'aire du domaine du plan est égale à la primitive de la borne supérieure moins la primitive de la borne inférieure ».

$$\boxed{A=F(b)-F(a)}$$

En unité d'aire (si on cherche une aire).

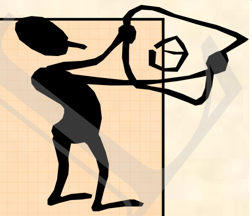
***Exemple**: Si l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées , l'unité d'aire est 6 cm², par conséquent:*

$$A=\left[F(b)-F(a)\right]\times 6cm^2$$

Les techniques de recherches de primitives F de f , nous permettrons de poursuivre le calcul intégral et déterminer ainsi l'aire d'un domaine du plan compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b (par exemple).

« TECHNIQUES ET METHODES »

Calcul intégral



Enoncés: *Calculer les intégrales I, J, K.*

16/ Calcul d'aire.

1) $I = \int_0^1 \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+5}}dx$ **2)** $J = \int_0^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$

3) $K = \int_1^3 \frac{10x-3}{5x^2-3x+8}dx$

4) *Soit f la fonction:* $f : x \to \frac{3}{x^2} \times e^{\left(\frac{4}{x}\right)}$

Déterminer l'aire (L) comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

Voici une solution :

1) $I = \int_0^1 \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+5}}dx$

Une primitive de

$$x \to \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+5}}$$

est la fonction F définie comme suit
(voir détail de la recherche de primitive page suivante)

$$F : x \to 2\sqrt{x^2-3x+5}$$

$$I = \int_0^1 \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+5}}dx = \left[2\sqrt{x^2-3x+5}\right]_0^1$$

$$I = \left[2\sqrt{x^2-3x+5}\right]_0^1$$

Utilisons la propriété du cours:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

se lit: « Primitive de la borne supérieure moins primitive de la borne inférieure »

$$I = 2\left[\sqrt{1^2-3+5} - \sqrt{0^2-0+5}\right]$$

$$I = 2\left[\sqrt{3} - \sqrt{5}\right]$$

$$\boxed{I = -2\left[\sqrt{5} - \sqrt{3}\right]}$$

$I \simeq -1{,}008$ *à 10^{-3} près*

Remarque: *Cette intégrale est négative.*

Rappel du cours: *« L'intégrale d'une fonction négative est négative »*

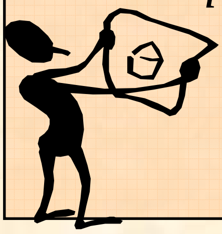
sur]0;1[, (2x -3) est négatif et $\sqrt{x^2-3x+5}$ *est positif,*

donc le quotient: $\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+5}}$

est négatif, et l'intégrale d'une fonction négative est négative, ce qui confirme le signe du résultat.

TECHNIQUES ET METHODES

Techniques de recherches de primitives



Technique et méthode : Comment déterminer la primitive de f sur I :

$$f(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+5}} \qquad I=\mathbb{R}$$

Voici une solution :

$$f(x)=\frac{\boxed{2x-3}}{\sqrt{x^2-3x+5}}$$

Technique & Méthode:

En remarquant que le numérateur est la dérivée du polynôme se trouvant sous la racine du dénominateur :

Posons : $u(x)=x^2-3x+5$

Remarque: u ne s'annule pas sur R et est strictement positif car Δ =9 - 28= -19, donc u du signe de a, donc positif .

$$u'(x)=\boxed{2x-3}$$

$$\boxed{\left(x^n\right)'=nx^{n-1}}$$

*Changeons de variable, passons de la variable x à la variable u, f devient comme ci contre, et nous désirons un **schéma de la forme ci contre**, Alors utilisons les propriétés suivantes:*

$$f(u)=\frac{u'}{\sqrt{u}}$$

$$\boxed{\int u^n\times u'=\frac{u^{n+1}}{n+1}+k}$$

$$\boxed{\frac{1}{a^n}=a^{-n}} \qquad \boxed{\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}}$$

L'expression de f avec la variable u sous la forme souhaitée est:

$$\boxed{f(u)=\frac{u'}{u^{\frac{1}{2}}}=u^{-\frac{1}{2}}u'}$$

$$f(u)=u^{-\frac{1}{2}}u'$$

*Cette transformation a pour but de « **mettre f sous la forme de notre schéma général d'intégration** » noté ci dessous.*

$$\int \underbrace{u^n\times u'}_{A}=\underbrace{\boxed{\frac{u^{n+1}}{n+1}+k}}_{B}$$

Puis intégrons (passage de A à B):

$$F(u)=\int f(u)du=\int \underbrace{u^{-1/2}u'}_{A}$$

$$F(u)=\underbrace{\boxed{\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+k}}_{B}=\frac{u^{1/2}}{1/2}+k$$

$$F(u)=2\times u^{\frac{1}{2}}+k=2\sqrt{u}+k$$

Puis en revenant à la variable x, les primitives F de f sur R sont :

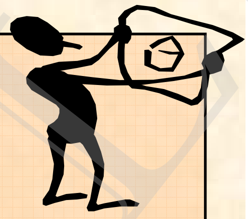
$$\boxed{F(x)=2\sqrt{x^2-3x+5}+k}$$

Vous pouvez toujours retenir la formule ci contre, mais dans un souci d'économie de mémorisation et aussi de gestion des calculs, il est bien de retenir la manière de procéder précédente.

$$\boxed{\int\frac{u'}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+k}$$

« TECHNIQUES ET METHODES »
calcul intégral

Enoncés: *Calculer l'intégrale de la fonction proposée:*



2) $J = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$

Voici une solution :

2) $J = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$

Une primitive de la fonction :

$$x \to \cos^3 x \sin x$$

est la fonction F définie comme suit ***(voir technique de recherche de primitive page suivante)***

$$F : x \to -\frac{1}{4}\cos^4 x$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$$

Utilisons la propriété du cours:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$J = \left[-\frac{1}{4}\cos^4 x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$J = -\frac{1}{4}\left[\cos^4 x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Puis: $\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

$$J = -\frac{1}{4}\left[\cos^4 \pi - \cos^4(-\pi)\right]$$

$$J = -\frac{1}{4}\left[(-1)^4 - (-1)^4\right]$$

Une puissance paire étant toujours positive: (-1)^4 = 1

$$J = -\frac{1}{4}[1 - 1] = -\frac{1}{4} \times 0$$

$$\boxed{J = 0}$$

Remarque et rappel de cours: *Si une fonction f est continue et impaire sur un intervalle I, symétrique par rapport à zéro, alors pour tout a de I :*

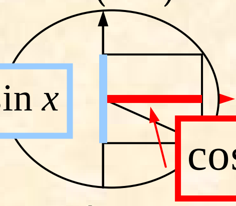
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

Ici, $f(x) = \cos^3 x \sin x$

étudions la parité de f:

$$f(-x) = \cos^3(-x)\sin(-x)$$

$\sin(-x) = -\sin x$



$\cos x = \cos(-x)$

La fonction cosinus étant paire, ***cosx = cos(-x)***
la fonction sinus étant impaire ***sin(-x)= - sin x***

D'où: $f(-x) = \cos^3 x \times (-\sin x)$

$$f(-x) = -\cos^3 x \sin x$$

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

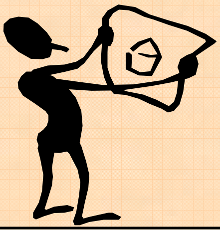
Par conséquent ***f étant impaire et les bornes d'intégration étant symétriques par rapport à zéro, il est bienvenu d'appliquer directement la propriété du cours, et par conséquent de se passer, dans le cas présent, de tout calcul:***

$$\boxed{J = 0}$$

TECHNIQUES ET METHODES

Techniques de recherches de primitives

Technique et méthode *: Comment déterminer la primitive de f sur I*



$$f(x)=\cos^3 x\sin x \qquad I=\mathbb{R}$$

Voici une solution :

$$f(x)=\cos^3 x\,\sin x$$

Ici, il s'agit d'une fonction trigonométrique, mais attention le schéma d'intégration à utiliser est le schéma « puissance » suivant:

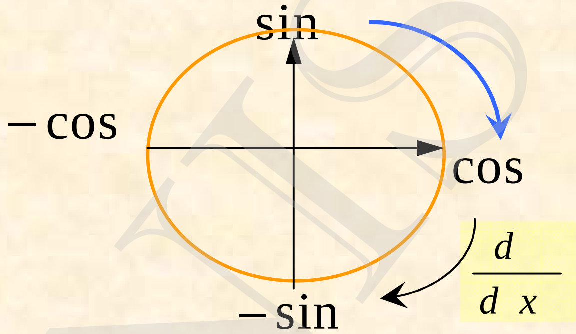
$$\boxed{\int u^n\times u'=\frac{u^{n+1}}{n+1}+k}$$

Posons : $u(x)=\cos x$

u est dérivable Sur $\mathbb{R}$ *, et :* $u'(x)=-\sin x$

$$-u'(x)=\sin x$$

Rappel sur les dérivées de fonctions trigonométriques:



Il s'agit d'un moyen mnémotechnique pour retrouver les schémas des dérivées de fonctions trigonométriques:

La dérivée d'un sinus donne un cosinus, on tourne d'un quart de tour dans le sens anti-trigonométrique pour dériver (sens horaire) . Ainsi, la dérivée d'un cosinus donne un (-sinus), et ainsi de suite.

L'expression de f en fonction de la variable u est:

$$f(u)=u^3(-u')$$

Ou encore:

$$f(u)=-u'u^3$$

On reconnaît le schéma d'intégration général en ***(uⁿ).***

Déterminons la primitive F de f:

$$F(u)=\int f(u)du=\int -u'u^3$$

Par linéarité: $\boxed{\int k\times f(x)dx=k\int f(x)dx}$

$$F(u)=-\int u'u^3$$

Utilisons le schéma d'intégration de (u^n) *:*

$$\boxed{\int u^n\times u'=\frac{u^{n+1}}{n+1}+k}$$

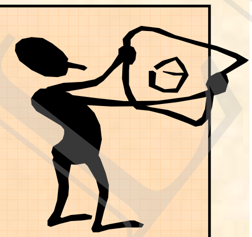
$$F(u)=-\frac{u^{3+1}}{3+1}+k=\frac{-1}{4}u^4+k$$

Puis en revenant à la variable x, les primitives F de f sur $\mathbb{R}$ *sont:*

$$\boxed{F(x)=\frac{-1}{4}\cos^4 x+k}$$

« TECHNIQUES ET METHODES »
calcul intégral

Enoncé: *Calculer l'intégrale de la fonction proposée:*



3) $$K = \int_1^3 \frac{10x-3}{5x^2-3x+8}dx$$

Voici une solution :

3) $$K = \int_1^3 \frac{10x-3}{5x^2-3x+8}dx$$

Une primitive de la fonction :

$$x \to \frac{10x-3}{5x^2-3x+8}$$

est la fonction F *définie comme suit*
(voir technique de recherche de primitive page suivante)

$$F : x \to ln\left(5x^2-3x+8\right)$$

$$K = \int_1^3 \frac{10x-3}{5x^2-3x+8}dx$$

Utilisons la propriété du cours:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)}$$

$$K = \left[ln\left(5x^2-3x+8\right)\right]_1^3$$

Puis: $\boxed{\left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)}$

$$K = \left[ln\left(5\times3^2-3\times3+8\right)-ln(5-3+8)\right]$$

$$K = \left[ln(45-9+8)-ln(10)\right]$$

$$K = \left[ln44 - ln10\right]$$

$$K = \left[ln(4\times11)-ln10\right]$$

$$K = ln2^2 + \ln 11 - ln10$$

Utilisons les propriétés:

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$$

$$\boxed{\ln x^{\alpha} = \alpha \ln x}$$

$$\boxed{K = 2ln2 + \ln 11 - ln10}$$

$$\boxed{K = \ln\left(\frac{22}{5}\right)}$$

Est une autre écriture

$K \simeq 1,48$ *à* 10^{-2} *près.*

Rédaction copie:

Enoncé: *Calculer l'intégrale suivante:* $K = \int_1^3 \frac{10x-3}{5x^2-3x+8}dx$

Posons :

$$\begin{cases} u(x) = 5x^2-3x+8 \\ u'(x) = 10x-3 \end{cases}$$

u est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$f(u) = \frac{u'}{u}$ *et:* $\boxed{\int \frac{u'}{u} = ln|u|}$

$$F(u) = \int f(u)du = \int \frac{u'}{u} = ln|u|$$

$$F(x) = ln\left(5x^2-3x+8\right)$$

$$K = \left[ln\left(5x^2-3x+8\right)\right]_1^3$$

$$K = \left[ln(45-9+8)-ln(10)\right]$$

$$K = \left[ln44 - ln10\right] = \ln\left(\frac{44}{10}\right)$$

$$\boxed{K = \ln\left(\frac{22}{5}\right)}$$

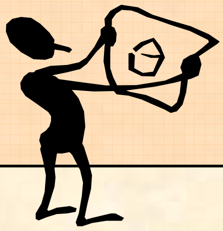
Ou bien :

$$\boxed{K = 2ln2 + \ln 11 - ln10}$$

TECHNIQUES ET METHODES

Techniques de recherches de primitives

***Technique et méthode** : Comment déterminer la primitive de f sur I*



$$f(x)=\frac{10x-3}{5x^2-3x+8} \qquad I=\mathbb{R}$$

Voici une solution :

$$f(x)=\frac{10x-3}{5x^2-3x+8}$$

En remarquant que le numérateur est la dérivée du dénominateur :

Technique & Méthode: Changement de variable

Posons : $u(x)=5x^2-3x+8$

***u** est dérivable et ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$.
Car Δ *est strictement négatif*
Δ= ***9 - 160 = -151**, donc u toujours du signe de a, donc positif .*

Dérivons u: $\boxed{(x^n)'=nx^{n-1}}$

$$u'(x)=10x-3$$

Changeons de variable, passons de la variable x à la variable u.
f fonction de la variable u devient:

$$\boxed{f(u)=\frac{u'}{u}}$$

Ici, nous sommes en présence du schéma d'intégration en « ln » :

Schéma d'intégration en ln

$$\boxed{\int\frac{u'}{u}=ln|u|+k}$$

$$f(u)=\frac{u'}{u}$$

Intégrons:

$$F(u)=\int f(u)du=\int\frac{u'}{u}=ln|u|+k$$

$$F(u)=ln|u|+k$$

(Remarque: La fonction Ln est définie pour tout u strictement positif).

Puis en revenant à la variable x, les primitives F de f sur $\mathbb{R}$, *sont :*

$$\boxed{F(x)=ln\left|5x^2-3x+8\right|+k}$$

Or on a vu que $(5x^2-3x+8)$ *est toujours strictement positif sur* $\mathbb{R}$ *, par conséquent les primitives F de f sont :*

$$\boxed{F(x)=ln\left(5x^2-3x+8\right)+k}$$

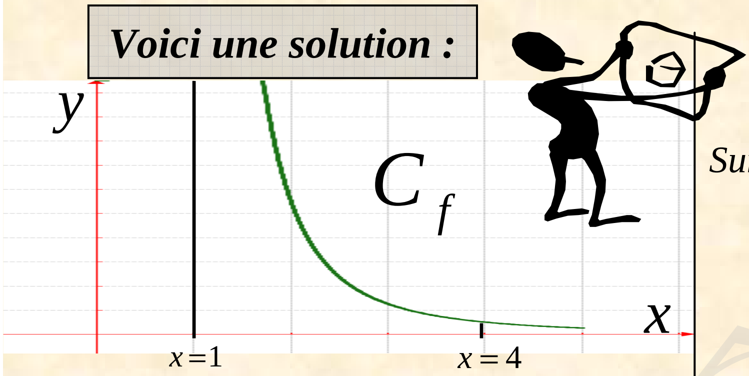
*« **TECHNIQUES ET METHODES** »*
calcul intégral

Enoncé:

4) *Soit f la fonction:* $f : x \to \frac{3}{x^2} \times e^{\left(\frac{4}{x}\right)}$

L'unité graphique est 2 cm
Déterminer l'aire (L)
comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 4.

Voici une solution :



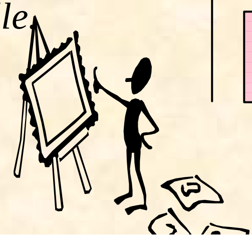
Notons tout d'abord que pour tout x de ***[1;4]*** *, **(3 / x ²)** est positif et la fonction exponentielle étant positive, la fonction f est positive sur* ***[1;4].***

***Remarque**: Une étude plus approfondie de f nous permettrait de prouver qu'elle est décroissante sur cet intervalle. (la dérivée de f étant négative sur cet intervalle). La calculatrice donne le graphique ci dessus.*

*L'aire du domaine du plan compris entre la courbe représentative de f l'axe des abscisses et les droites d'équations **x = 1 et x = 4** est :*

$$L = \int_1^4 \frac{3}{x^2} \times e^{\left(\frac{4}{x}\right)} dx$$

*La fonction f étant définie et dérivable sur **[1;4]** elle est donc continue et par conséquent intégrable sur cet intervalle.*



Une primitive de : $f : x \to \frac{3}{x^2} \times e^{\left(\frac{4}{x}\right)}$

*Sur **[1; 4]** est la fonction **F**, définie par:*
(voir technique de recherche de primitive page suivante)

$$F : x \to -\frac{3}{4} \times e^{\left(\frac{4}{x}\right)}$$

Utilisons la propriété du cours:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

$$L = \left[\frac{-3}{4} \times e^{\left(\frac{4}{x}\right)}\right]_1^4$$

***Remarque:** Il est pratique de mettre en facteur le coefficient **(-3/4),** pour aérer les calculs.*

$$L = \frac{-3}{4}\left[e^{\left(\frac{4}{4}\right)} - e^{\left(\frac{4}{1}\right)}\right]$$

$$\boxed{L = \frac{3}{4}\left[e^4 - e\right]} \quad u.a$$

L'unité d'aire est: $2 \times 2 cm^2$

$$\boxed{L = \cancel{4} \times \frac{3}{\cancel{4}}\left[e^4 - e\right] = 3e\left(e^3 - 1\right)} \; cm^2$$

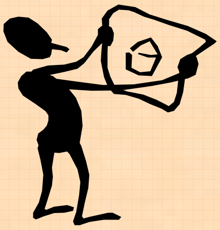
La calculatrice donne:

$L \simeq 155,64 cm^2$ *à 10 ⁻² cm² près.*

TECHNIQUES ET METHODES

Techniques de recherches de primitives

***Technique et méthode** : Comment déterminer la primitive de f sur I*



$$f(x)=\frac{3}{x^2}\times e^{\left(\frac{4}{x}\right)} \qquad I = \left]0\,;+\infty\right[$$

Voici une solution :

$$f(x)=\boxed{\frac{3}{x^2}}\times e^{\left(\frac{4}{x}\right)}$$

Le schéma d'intégration en exponentielle étant le suivant:

$$\boxed{\int u'e^u = \boxed{e^u}+k}$$

On désire obtenir une expression de la forme ($u'e^{u}$). Remarquons que la dérivée de ($4/x$) ressemble à ($3/x^{2}$).

Technique & Méthode:

Posons : $u(x)=\frac{4}{x}$ *u est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$.

$$u(x)=4x^{-1}$$

Dérivons u: $u'(x)=-4x^{-2}$

$$\boxed{(x^n)'=nx^{n-1}}$$

$$u'(x)=\frac{-4}{x^2}$$

Ou bien directement en utilisant la dérivée de (1 / x):

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}} \qquad 4\left(\frac{1}{x}\right)'=4\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)=\frac{-4}{x^2}$$

$$u'(x)=-\frac{4}{x^2}$$

Pour retrouver ($3/x^2$), multiplions u'(x) par (-3), et divisons par (4), l'équation devient:

$$\frac{-3}{4}u'(x)=\frac{-\cancel{4}}{x^2}\times\left(\frac{-3}{\cancel{4}}\right)$$

Soit: $$\boxed{\frac{-3}{4}u'(x)=\frac{3}{x^2}}$$

L'expression de f avec la variable u est:

$$f(u)=-\frac{3}{4}u'\times e^u$$

Intégrons les deux membres de l'équation:

$$F(u)=\int f(u)du=\int -\frac{3}{4}u'\times e^u$$

Par linéarité de l'intégrale: $$\boxed{\int k\times f(x)dx=k\int f(x)dx}$$

$$F(u)=-\frac{3}{4}\int u'e^u$$

Utilisons le schéma d'intégration en exponentielle:

$$\boxed{\int u'e^u=\boxed{e^u}+k}$$

$$F(u)=\frac{-3}{4}\boxed{e^u}+k$$

Puis en revenant à la variable x, les primitives F de f sur $\mathbb{R}_+^*$. *sont:*

$$\boxed{F(x)=-\frac{3}{4}\times e^{\left(\frac{4}{x}\right)}+k}$$