Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire :**2013/2014	**Série d'exercices :** **Equations différentielles**	4ème Math **Tunis ,Tél :27509639**

Exercice n°1 :

Dans une réaction chimique, la concentration X d'un produit exprimée en moles par litre satisfait à l'équation différentielle : (E):X'(t)=1-X(t) où X définie une fonction dérivable et t est le temps exprimés en min (t>0).

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte, on demande de la cocher.

1) Les solutions de (E) sont les fonctions f définies par :
   a) $f(t)=1+ke^{t}$, k réel b) $f(t)=1-ke^{-t}$, k réel c) $f(t)=1+ke^{-t}$, k réel.
2) La fonction x vérifie dans les conditions expérimentales : X(0)= 2. Alors :
   a) $X(t)=1+e^{t}$ b) $X(t)=1+e^{-t}$ c) $X(t)=1-e^{-t}$.
3) La valeur moyenne $\overline{X}$ de la concentration du produit pendant la première minute de la réaction est :
   a) $0,5\left(1+\frac{1}{e}\right)$ b) $2-\frac{1}{e}$ c) $1+\frac{1}{e}$.
4) La concentration du produit tend vers une valeur limite, lorsque t tend vers $+\infty$, est égale à :
   a) 2 b) 1 c) 1,5.

Exercice n°2 :

On considère l'équation différentielle : $y'-2y=xe^{x}$ (1).

1) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y'-2y=0$, où y désigne une fonction dérivable sur IR.
2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur IR par : $u(x)=(ax+b)e^{x}$.
   a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
   b) Montrer que v est une solution de l'équation (1) si et seulement si v – u est solution de (2).
   c) En déduire les solutions de (1).
3) Déterminer la solution de (1) qui s'annule en 0.

Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\frac{9}{2}e^{-2x}-3e^{-3x}$.

A) Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y= 3e^{-3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
2) En déduire que la fonction h définie sur IR par : $h(x)=\frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').
3) Vérifier que la fonction g définie sur IR par : $g(x)=-3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4) Montrer que f est solution de (E).

B) On nomme $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que pour tout x de IR on a : $f(x)=3e^{-2x}\left(\frac{3}{2}-e^{-x}\right)$.
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variation de f.
4) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.
5) Calculer f(1) et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.
6) Déterminer l'aire A de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 1.

Exercice n°4 :

A) Soit l'équation différentielle (E) : $\left(1+e^{2x}\right)y'-y=0$.On pose $z=y\sqrt{1+e^{2x}}$.

1) a) Montrer que y solution de (E) si et seulement si z est solution de z' – z = 0.

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{e^{x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

c) Tracer $\mathscr{C}$.

3) a) Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

4) b) Soit g la fonction réciproque de f et soit $\mathscr{C}'$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.Montrer que $g(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^{2}}{1-x^{2}}\right)$ pour tout $x\in J$ et tracer $\mathscr{C}'$.

B) 1) Soit φ la fonction définie sur IR par : $\varphi(x)=f(x)-x$. Etudier les variations de φ et montrer qu'il existe un réel α tel que $\varphi(\alpha)=0$ et vérifier que $\alpha\in]\ln 2,1[$.

2) On pose $I=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}\ln\left(\dfrac{x^{2}}{1-x^{2}}\right)dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer I (On remarquera que $\dfrac{2}{1-x^{2}}=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}$).

b) En déduire en fonction de α, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les deux axes.

<u>Exercice n°5 :</u>

Soit (E) l'équation différentielle (E) : $y''+y'=e^{-x};x\in IR$.

1) Soit f une fonction deux fois dérivable sur IR et solution de (E). Montrer que f est solution de (E) si et seulement si f ' est solution de l'équation différentielle (E_1) : $z'+z=e^{-x}$.

2) Soit $g(x)=xe^{-x}$ .Vérifier que g est une solution particulière de (E_1).

3) Soit (E_2) : $z'+z=0$ .Soit φ et h les fonctions définies sur IR par : $h(x)=\varphi(x)-g(x)$.

a) Montrer que φ est solution de (E_1) si et seulement si h est solution de (E_2).

b) Résoudre (E_2), et en déduire les solutions de (E_1) puis la solution f de (E) qui vérifie f (0)= f '(0)=0.

<u>Exercice n°6 :</u>

1) Résoudre l'équation différentielle : $4y''+y=0$.

2) Déterminer la solution particulière de cette équation d différentielle vérifiant $\begin{cases} f(\pi)=\sqrt{3} \\ f'(\pi)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

3) Montrer que cette solution f vérifie pour tout réel x $f(x)=2\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4) Résoudre dans $[0,4\pi[$ l'équation $f(x)=1$.