# Le Cassini des futurs MPSI

August 15, 2013

## 1 Quelques définitions et notations

### 1.1 Relatives aux ensembles

- On étend les notations $A \cup B$ et $A \cap B$ comme suit: Pour tous ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on note $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ la réunion des $A_i$ et $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ l'intersection des $A_i$.
- On appelle produit cartésien de deux ensembles $A$ et $B$ l'ensemble $A \times B$ des couples $(a, b)$ où $a \in A$ et $b \in B$. On peut également étendre le produit cartésien à plus de deux ensembles. Pour tous ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on note $\prod_{i=1}^{n} A_i$ l'ensemble des n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ où, pour tout $i$, $a_i \in A_i$.
- Pour tous entiers $m, n$, on note $[\![m, n]\!] = \{k \in \mathbb{Z}, m \leq k \leq n\}$ l'intervalle des entiers compris entre $m$ et $n$.

  Dans les définitions qui suivent, $E$ et $F$ désignent des ensembles.
- On note $P(E)$ ou $2^E$ l'ensemble des parties de $E$.
- Soit $A$ une partie de $E$. On note $1_A : E \to \{0, 1\}$ et on appelle fonction caractéristique de $A$ l'application définie par $1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
- On note $\mathfrak{F}(E, F)$ ou $F^E$ l'ensemble des fonctions de E dans F.
- Une fonction $f : E \to F$ est injective si et seulement si deux points quelconques de E distincts ont des images distinctes, c'est à dire $\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
- Une fonction $f : E \to F$ est surjective si et seulement si tout point de $F$ a un antécédent par $f$, c'est à dire $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
- Une fonction $f : E \to F$ est bijective si et seulement si elle est injective et surjective, c'est à dire si tout élément de $F$ admet un et un seul antécédent par $f$. Si $E = F$, on dit que $f$ est une permutation de $E$.
- Un ensemble $E$ est dit fini s'il existe un entier naturel $n$ et une bijection $f : [\![1, n]\!] \to E$. Cet entier (dont on montre facilement l'unicité) est appelé le cardinal de E et noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$. Évidemment, on définit un ensemble infini comme un ensemble qui n'est pas fini.

## 1.2 Relatives à l'analyse

- Soit $E$ un ensemble et $f : E \to E$. On dit que $x \in E$ est un point fixe de $f$ si $f(x) = x$.

- On définit la partie entière d'un réel $x$ comme le seul entier $E(x)$ (ou $\lfloor x \rfloor$) vérifiant: $x - 1 < E(x) \leq x$ (on admet l'existence et l'unicité).

- Soit $(u_n)$ une suite et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On note

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \underset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (u_n) \text{ admet une limite en } +\infty \\ \lim (u_n) = l \end{cases}$$

  On peut bien sûr adapter cette définition aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. $f$ est dite convexe si

$$\forall x, y \in I \subset \mathbb{R}, \forall t \in [0,1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

  (bien comprendre sur un dessin que la définition signifie que la courbe de $f$ est en dessous de toutes ses cordes)

- Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f$ est dite $n$ fois dérivable si $f$ est dérivable et si $f'$ est $n-1$ fois dérivable (avec la convention que toutes les fonctions sont 0 fois dérivables). On définit alors, récursivement, $f^{(n)}$ la dérivée $n$-ième de $f$ par $(f')^{(n-1)}$, avec la convention $f^{(0)} = f$.

# 2 Énoncés

## 2.1 Algèbre générale

### 2.1.1 Arithmétique

1. Le nombre $\dfrac{(7^{2004})^{2014} - (3^{2004})^{2014}}{2014 - 2004}$ est-il un entier naturel ?

2. Soit $p$ un nombre premier supérieur ou égal à 5. Montrer que 240 divise $p^4 - 1$.

3. (*) Soit $S \in \mathbb{N}^*$. Comment écrire $S$ comme somme d'entiers positifs tel que le produit de ces entiers soit maximal?

4. Montrer qu'il existe au plus un nombre premier dont le logarithme est rationnel.

5. (*) Soit $f$ la fonction qui à un entier $n$ associe la somme de ses chiffres (ex: $f(87) = 15$)). Trouver $f(f(f(4444^{4444})))$.

6. (*) Montrer que, quel que soit $n$ appartenant à $\mathbb{N}$ premier avec 10, il existe un multiple de $n$ ne contenant que des 1.

7. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $p_n + p_{n+1}$ n'est pas le produit de 2 nombres premiers.

8. Démontrer qu'il existe un cube parfait entre $n$ et $3n$ pour tout entier $n \geq 10$.

9. (*) Soit $p > 1$ un entier naturel. Démontrer le théorème de Wilson:
$$p \text{ est premier } \iff (p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$$
.

10. (*) Déterminer l'ensemble des entiers naturels $n$ non nuls tels que $n^2$ ne divise pas $n!$.

11. Soient $m$ et $k$ deux entiers naturels impairs, montrer que $m$ divise $1^k + 2^k + \cdots + (m-1)^k$.

12. Trouver le plus petit entier naturel $x$ tel que $2|x-1, 3|x-2, \cdots, 9|x-8$.

13. Soient deux entiers positifs $n, k$ tels que $k \leq n$ et $n \geq 1$.
Montrer que $\dbinom{n}{k} \times PGCD(n,k) \equiv 0 \pmod n$.

14. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ n'a aucune solution entière excepté $x = y = z = 0$.

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\dfrac{\sigma(n!)}{n!} \geq 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ où $\sigma(n) = \displaystyle\sum_{d|n} d$ est la somme des diviseurs de $n$.

16. Soit $p \in \mathbb{Q}$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $p^a \in \mathbb{Z}$. Montrer alors que $p \in \mathbb{Z}$.

17. Montrer que si 7 ne divise pas l'entier $n$, alors 7 divise $n^6 - 1$.

18. (*) Déterminer les entiers $n \geq 1$ tels que 7 divise $n^n - 3$.

19. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que la congruence
$x^k \equiv 0 \pmod n$ admette des solutions pour $n \not| x$ et $k > 0$.

20. Pour $n$ entier naturel différent de 0 , on définit $a_n$ et $b_n$ entiers par: $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Montrer que $a_n$ et $b_n$ sont premiers entre eux.

21. Soit $p$ un entier naturel premier et $k \in [\![1, p-1]\!]$. Montrer que $p$ divise $\binom{p}{k}$

22. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que la congruence $xy \equiv 0 \pmod{n}$ admette des solutions non multiples de $n$.

23. (*) On écrit le rationnel $\displaystyle\sum_{k=1}^{1351} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ sous forme irréductible $\dfrac{a}{b}$. Montrer que 2027 divise $a$.

24. Montrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

25. (*) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas un entier si $n > 1$.

26. (*) Soit $a \geq 5$ un entier impair. Résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation $x^{\lfloor x \rfloor} = \dfrac{a}{2}$.

27. Soit $s(n)$ la somme des chiffres d'un entier positif $n$. Montrer que pour tout entier strictement positif $n$, on a $\dfrac{s(n)}{s(2n)} \leq 5$.

28. Montrer que la fraction $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est toujours irréductible quelque soit l'entier $n$.

29. Montrer que $3^{4^5} + 4^{5^6}$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux facteurs entiers.

30. $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ est il rationnel ?

31. Déterminer le reste de la division euclidienne de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i$ par $2^n$.

32. Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ : $x^2 + y^2 = 7z^2$.

33. Démontrer l'existence d'une infinité d'entiers $x$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, x + n^4$ n'est pas un nombre premier.

34. Quel est le chiffre des unités de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$ ?

35. Soient $x, y$ deux entiers naturels tels que $\begin{cases} xy + x + y & = & 71 \\ x^2y + xy^2 & = & 880 \end{cases}$
Calculer $x^2 + y^2$.

36. Dans ce problème, on détermine l'expression des triplets pythagoriciens.
On appelle triplet Pythagoricien tout triplet $(X, Y, Z)$ d'entiers naturels tels que

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \ (\star)$$

Une solution évidente étant $(0, 0, 0)$, on cherchera à résoudre l'équation dans $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$.

On appelle solution primitive une solution $(x, y, z)$ formée de 3 entiers premiers entre eux dans leur ensemble (On généralise le concept de PGCD de deux entiers à celui de $n$ entiers)

(a) Montrer que si $(x, y, z)$ est une solution primitive, alors $x$,$y$ et $z$ sont premiers entre eux *deux à deux.*

(b) Approche géométrique : En divisant les deux membres de $(\star)$ par $Z^2$ nous nous ramenons à l'équation $(\star\star)$ suivante :

$$x^2 + y^2 = 1, (x, y) \in \mathbb{Q}^\star \times \mathbb{Q}^\star$$

En définissant le repère usuel du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, il s'agit donc de trouver tous les points rationnels du cercle unité $(C)$, i.e tous les points dont les deux coordonnées sont rationnelles.

Soit $A(-1, 0) \in C$.

Montrer que si $M$ est un point rationnel de $C$, la droite $(AM)$ a un coefficient directeur rationnel.

(c) Soit $D_m$ la droite passant par $A$ et de coefficient directeur $m$.

- Etudier l'intersection de $D_m$ et de $C$
- Montrer que si $m \in \mathbb{Q}$, la droite $D_m$ coupe $C$ en $A$ et en un point $M$ qui est rationnel

(d) Déterminer une formule générale des solutions de $(\star)$

37. Pour tout entier naturel $n$, on note $I_n$ le nombre d'entiers $p$ pour lesquels $50^n < 7^p < 50^{n+1}$

    (a) Démontrer que pour tout entier n, $I_n$ vaut 2 ou 3.

    (b) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n$ pour lesquels $I_n$ vaut 3 et donner le plus petit d'entre eux.

38. Soit $(u_n)$ une suite arithmétique strictement croissante. Montrer que si $(u_n)$ admet un terme qui est un carré parfait, alors elle en admet une infinité.

39. (*) Soit $P$ un polynôme admettant $n+1 > 2$ racines distinctes entières $(0, a_0, a_1, ..., a_{n-1})$.Trouver l'ensemble des solutions $k$ entières telles que $P(P(k)) = 0$.

40. Soient $a \geq 2$ un entier et $m$ et $n$ deux entiers strictement positifs.
    Exprimer $PGCD(a^m - 1, a^n - 1)$ en fonction de $a$,$m$ et $n$.

41. Soient $a$ et $b$ deux entiers strictement positifs et $k$ dans $[\![0, b-1]\!]$.
    Calculer $E\left(\frac{ka}{b}\right) + E\left(a - \frac{ka}{b}\right)$. En déduire la formule du PGCD:

$$PGCD(a, b) = a + b - ab + 2\sum_{k=1}^{b-1} E\left(\frac{ka}{b}\right)$$

.

### 2.1.2 Équations, inéquations et inégalités

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, x + \frac{1}{x} \geq 2$

2. Trouver tous les triplets $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = xyz$.

3. Ici, on démontre quelques propriétés de la fonction partie entière.

(a) Montrer que la propriété "Pour tout réel $x$, on a $E(x) \leq x < E(x)+1$." caractérise également la partie entière.

(b) Montrer que, pour tout réel $x$ et tout entier n, on a $E(x+n) = E(x)+n$.

(c) Montrer que, pour tout réel $x$, on a $E(x)+E(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

(d) Montrer que la fonction $x \mapsto E(x)$ est croissante.

(e) Montrer que, pour tout entier strictement positif $n$ et tout réel $x$, on a $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

4. Montrer que pour tous réels $x$ et $y$, on a: $y(1-x)^2 + (1-y)x^2 \geq y - y^2$.

5. Soient $n$ un entier supérieur ou égal à 1 et $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $n$ nombres réels strictement positifs. Montrer que : $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$ Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

6. (*) Soient $a_1, \cdots, a_n > 0$ des réels, $p < q$ deux entiers naturels non nuls.
Montrer que $(a_1^q + ... + a_n^q)^{1/q} \leq (a_1^p + ... + a_n^p)^{1/p}$.

7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6 < 1$

8. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'entier naturel $n$ pour qu'il existe une fonction polynomiale $P$ à coefficients réels telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ P\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^n - \frac{1}{x^n}$$

9. (*) Montrer que pour tout n-uplet de réels $(a_1, \cdots, a_n)$ : $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos^2(a_i - a_j) \geq \frac{n(n-2)}{4}$

10. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x+10)(x+11)(x+12)(x+13) = 1$.

11. Comparer $3^\pi$ et $\pi^3$.

12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$

13. Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-f(x)) = x$$

.

14. (*) Déterminer les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \neq y$, $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = g\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

15. On considère une élection où participent 27 candidats et où votent n citoyens. On suppose que si un candidat reçoit $m$ voix, alors $\frac{100m}{n} \leq m - 1$. Quelle est la plus petite valeur de $n$ possible ?

16. (*) Soient $a, b, c > 0$ avec $abc = 1$. Montrer que : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[10]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$.

17. Soit $P$ le polynôme défini par $P = (X-1)^n - (X+1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Trouver toutes les racines complexes de $P$.

18. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

19. Résoudre et discuter l'équation $\sin(x) + m\cos(x) = \sqrt{1+m^2}\cos(3x)$ d'inconnue $x$ dans $\mathbb{R}$.

20. Résoudre et discuter l'équation $\sin(x)\tan(x)\left(4-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$ d'inconnue $x$ dans $\mathbb{R}$.

21. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$

22. Trouver l'ensemble des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ tel que $f(z) + if(\bar{z}) = 2i$.

23. On établit ici quelques propriétés des fonctions convexes:

    Dans tout ce qui suit, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $I$.

    (a) Montrer que si $f$ est convexe, alors, pour tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n = 1$, on a l'inégalité de Jensen:
    $$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

    (b) Montrer que si $f$ est convexe, alors pour tous $a < b < c$ dans $I$, on a
    $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$
    (faire des dessins !)

    (c) Montrer que $f$ est convexe sur I si et seulement si, pour tout $a \in I$,
    $g : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante. (le voir sur un dessin)

### 2.1.3 Logique

1. Justifier que $P \Rightarrow Q$ et non $Q \Rightarrow$ non $P$ ont la même signification.

2. Soit $P$ une proposition à deux variables. Montrer
   $$\exists y \in B, \forall x \in A, P(x,y) \Longrightarrow \forall x \in A, \exists y \in b, P(x,y)$$
   Que dire de l'implication réciproque ?

3. Que veulent dire les assertions suivantes ?
   - $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
   - $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$

4. (*) Montrer l'équivalence des propositions suivantes:
   - Toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. (On dit que $\mathbb{N}$ est bien ordonné)
   - Pour toute proposition $P$ définie sur $\mathbb{N}$, on a:
     $$(P(0) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$
     (Principe de récurrence)

### 2.1.4 Théorie des ensembles

1. On établit ici quelques propriétés des fonctions caractéristiques:

   Soit $E$ un ensemble.

   (a) Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} P(E) & \to & \{0,1\}^E \\ A & \mapsto & 1_A \end{array}$ est bijective.

   (b) Soient $A$ et $B$ deux parties de E. Exprimer $1_{\bar{A}}$, $1_{A\cup B}$ et $1_{A\cap B}$ en fonction de $1_A$ et $1_B$.

   (c) (Application): On définit la différence symétrique de deux parties $A$ et $B$ de $E$ par $A\Delta B = (\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B}\cap A)$. Montrer les identités:

   - $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
   - $A\cap(B\Delta C) = (A\Delta B)\cap(A\cap C)$

2. (*) Soit $E$ un ensemble. Montrer que $E$ est infini si et seulement pour tout $f : E \to E$, il existe $F \subset E$ différente de $E$ et $\emptyset$ tel que $f(F) \subset F$.

3. (*) Soient $I_1, \ldots, I_n$ des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ soit un intervalle de $\mathbb{R}$.

   Montrer qu'il existe $j$ entre 1 et n tel que $\displaystyle\bigcup_{k\neq j} I_k$ soit encore un intervalle.

## 2.2 Analyse

### 2.2.1 Calcul intégral

1. Montrer que pour tout $x$ strictement positif: $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\pi - |2x-\pi|)\sin x \; dx$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n(x)dx$ en fonction de n.

4. (*) Montrer que: $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{n^2+x^3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

### 2.2.2 Continuité, TVI, etc.

1. Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que l'équation $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = f(x)$ admet une solution sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

   (*) Plus généralement, montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, il existe un réel $a_n$ appartenant à $\left[0, 1-\dfrac{1}{n}\right]$ tel que : $f(a_n) = f\left(a_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

2. Résoudre l'équation $3^x + 4^x = 7^x$ dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. (On dit que $x$ est un point fixe de $f$). (*) Montrer que le résultat reste vrai si l'on suppose remplace "continue" par "croissante".

4. Montrer que la fonction $f : x \mapsto (x - E(x))(x - E(x) - 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement décroissante.

   Démontrer que le système suivant a une solution unique : $\begin{cases} x & = & f(y) \\ y & = & f(z) \\ z & = & f(x) \end{cases}$

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, périodique et admettant une limite en $+\infty$. Que dire de $f$ ?

7. Quelle est la nature des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ ?

8. Soit $f$ une fonction continue surjective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que chaque point est atteint une infinité de fois.

### 2.2.3 Dérivation

1. Soit $D^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $C^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est continue sur $\mathbb{R}$.

   (a) A t-on l'égalité $D^1(\mathbb{R}) = C^1(\mathbb{R})$ ? On pourra considérer la fonction $f$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (b) Trouver une fonction non continue sur $\mathbb{R}$, admettant une primitive sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ dérivable sur $I$. Montrer que $f$ est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.

3. Soient $f$ et $g$ deux fonctions $p$ fois dérivables sur l'ensemble des réels. Montrer que pour tout entier naturel $n \leq p$, on a la formule de Leibniz : $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

4. Soit $f$ une fonction périodique de période $T$, dérivable et dont la dérivée est continue. Montrer que la moyenne de $f'$ sur tout intervalle de longueur $kT$, $k$ entier, est nulle.

### 2.2.4 Des limites

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

2. (*) Existence et calcul de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3. Existence et calcul de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

4. Existence et calcul de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{dt}{\ln t}$.

5. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(t^2)}{(2+t)^n} dt$

6. (*) On introduit pour tout $u > 0$ : $\Gamma(u) = \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{u}{2^0}\right) cos\left(\frac{u}{2^1}\right) \cdots \cos\left(\frac{u}{2^n}\right)$.
   Montrer que $\Gamma(u) = \frac{\sin(2u)}{2u}$ pour tout $u > 0$.

7. Montrer (après avoir donné un sens à l'énoncé) que $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}} = 2$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f$ la fonction définie sur $[n, +\infty[$ par

   $f(x) = \sqrt{x-n} + \sqrt{x-n+1} + ... + \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \ldots + \sqrt{x+n} - (2n+1)\sqrt{x}$

   Etudier les variations de $f$ sur $[n, +\infty[$ et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

9. Déterminer $\lim_{x\to 0} (\cos(x) + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$

10. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

11. (*) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

### 2.2.5 Suites

1. (*) Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Montrer que $u_{1000} \geq 45$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n$ entier supérieur ou égal à 1 : $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(x^{\frac{1}{k}} - 1\right)$.
   Pour quelles valeurs de $x$ la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

3. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que $u_1 = 1$ et telle que, pour tout $n$, on ait la relation :
   $$(u_1 + ... + u_n)^2 = u_1^3 + u_2^3 + ... + u_n^3$$
   Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = n$

4. Montrer qu'une suite d'entiers naturels converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

5. (*) Soit $P = X^3 - X + 1$.
   (a) Montrer que P admet une unique racine réelle $\alpha$ et deux racines complexes conjuguées $\beta$ et $\gamma = \overline{\beta}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$. Montrer que cette suite est à valeurs entières.
   (c) Déterminer (si elle existe) : $\lim_{n\to\infty} \sin(\pi\alpha^n)$

6. On pose, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.
   Montrer que ces deux suites ont même limite et que cette limite est irrationnelle.

7. Soit $(x_n)$ une suite réelle bornée vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n+1})$.
   On pose, pour tout entier naturel $n$, $y_n = x_{n+1} - x_n$.
   Montrer que $(y_n)$ converge vers 0 puis que $(x_n)$ converge.

8. Prouver que la suite $(cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

9. Est-il possible de trouver une formule explicite pour la suite définie par
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{E(\ln n)} = n$?

10. (*) Soit $(u_n)$ définie par récurrence par : $u_0, u_1 \in ]0, 1[$ et $\forall n, u_{n+2} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}})$.
    Montrer que la suite est convergente, déterminer sa limite et montrer que la suite est monotone à partir d'un certain rang.

11. (*) Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels positifs telle que $u_0 = 1$ et telle que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, au moins la moitié des termes $u_0, u_1, ..., u_{n-1}$ soient supérieurs ou égaux à $2u_n$. Montrer que $(u_n)$ tend vers 0.

12. Déterminer les suites $(u_n)$ telles que $u_0, u_1 > 0$ et vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3^n u_{n+1} u_n$$

    .

13. Soit $(u_n)$ une suite réelle définie par $u_0$ et $u_1$ tels que $u_0 < u_1$ et pour tout entier $n > 1$ par la relation $u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$.
    Montrer que $(u_n)$ converge et calculer sa limite.

14. Soit $(u_n)$ une suite réelle définie par $u_0$ et $u_1$ dans $\mathbb{R}^+$ et pour tout entier $n \geq 2$ par $u_n = \sqrt{u_{n-1}u_{n-2}}$
    Montrer que $(u_n)$ converge et calculer sa limite.

15. Soit $(u_n)$ une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que $(u_n)$ tend vers $+\infty$.

## 2.3 Sommes et calculs inclassables

1. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

2. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

3. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

4. Simplifier $\sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}$.

5. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{2k}$.

6. Calculer pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$

7. Montrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)=\frac{1}{16}$

8. Montrer que : $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

9. Quel est le nombre de racines réelles du polynôme $P_n=nX^n-X^{n-1}-\cdots-X-1$ ?

10. Démontrer que $\sqrt[3]{(18+\sqrt{325})}+\sqrt[3]{(18-\sqrt{325})}$ est rationnel.

11. (*) Soit $a$, $b$ et $c$ les racines (réelles ou complexes) du polynôme $P=X^3-X+1$. Calculer $a^7+b^7+c^7$.

12. (*) Trouver un polynôme de degré 7 à coefficients entiers qui admet $\sqrt[7]{\frac{3}{5}}+\sqrt[7]{\frac{5}{3}}$ comme racine.

## 2.4 Combinatoire, probabilités

1. Calculer le nombre de diagonales d'un polygone convexe à $n$ sommets.

2. Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$. Calculer $\displaystyle\sum_{X\subset E}\operatorname{card}(X)$.

3. (*) On se donne $d\in\mathbb{N}^*$ et, pour tout $(x,y)\in\{0,1\}^d$ (c'est à dire $x=(x_1,\cdots,x_d), y=(y_1,\cdots,y_d)$ où les $x_i$ et $y_j$ sont des 0 ou des 1), on pose $x.y=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_dy_d$.
   On fixe maintenant un $w\in\{0,1\}^d$ tel que $w\neq(0,\cdots,0)$.
   Montrer que $\displaystyle\sum_{x\in\{0,1\}^d}(-1)^{w.x}=0$ (c'est à dire la somme sur tous les éléments $x\in\{0,1\}^d$ de $(-1)^{w.x}$).

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $p$ et $q$ des entiers naturels inférieurs ou égaux à $n$.
   Montrer que $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}\Leftrightarrow q\in\{p,n-p\}$.

5. Dénombrer les applications strictement croissantes de $\{1,2,\cdots,p\}$ dans $\{1,2,\cdots,n\}$.
   (*) Dénombrer les applications croissantes de $\{1,2,\cdots,p\}$ dans $\{1,2,\cdots,n\}$.

6. (*) Soit $\alpha\in[0,\pi]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $V_n(\alpha)$ le nombre de changements de signes dans la suite $1,\cos\alpha,\cos(2\alpha),\cdots,\cos(n\alpha)$. Montrer que $\dfrac{V_n(\alpha)}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{\alpha}{\pi}$.

7. (*) Dans une grande assemblée, on demande à chaque personne d'écrire son nom sur un bout de papier et de le mettre dans un chapeau. On agite le chapeau puis chacun tire un bout de papier. Quelle est la probabilité que personne ne tire le bout de papier portant son propre nom ? (On pourra utiliser la formule du crible)

8. Dans un repère orthonormal, on choisit 5 points distincts à coordonnées entières. Démontrer alors qu'il existe un segment reliant 2 de ces 5 points, qui passe par un autre point à coordonnées entières du repère.

9. (*) On colorie chaque point du plan en rouge ou en bleu. Montrer qu'on peut trouver un triangle équilatéral dont tous les sommets sont de la même couleur. Même chose pour un rectangle.

10. (*) Soit $P$ un polynôme de degré $n > 1$ à coefficients entiers et $k > 1$ un entier. On pose $Q = P(P(\cdots P(P(X))\cdots))$, où $P$ apparait $k$ fois. Montrer qu'il existe au plus $n$ entiers $t$ tels que $Q(t) = t$.

11. (*) Ici, on dénombre des applications remarquables entre ensembles finis:
    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, combien y a-t-il de permutations de $[\![1,n]\!]$ ?
    (b) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Si $p = n$, combien y a-t-il d'applications injectives de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ ? Si $p > n$ ? Et si $p < n$ ?
    (c) Combien vaut le nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$, noté $S_{p,n}$, si $p < n$ ? Si $p = n$ ?
    On suppose maintenant $p \geq n$
    (d) Montrer par un raisonnement combinatoire que $S_{p,n} = n(S_{p-1,n-1} + S_{p-1,n})$. Que vaut $S_{p,1}$ pour un entier $p$ quelconque ? En déduire une méthode pour générer la table des $S_{p,n}$.
    (e) Démontrer la formule du crible : Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles, on a
    $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{J\subset[\![1,n]\!],J\neq\emptyset} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|$$
    (on pourra utiliser les fonctions caractéristiques)
    (f) En déduire une formule explicite pour $S_{p,n}$ en utilisant les ensembles $A_i$ contenant toutes les fonctions de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ qui n'atteignent pas $i$.

12. (*) Dans ce problème, on dénombre les permutations sans points fixes des ensembles finis. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$. On appelle dérangement de $[\![1,n]\!]$ toute permutation $\sigma$ de $[\![1,n]\!]$ telle que : $\forall i \in [\![1,n]\!], \sigma(i) \neq i$. On note $D_n$ l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$.
    (a) Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$. Soit $A_{i_0}$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ qui laissent fixe $i_0$. Quel est le cardinal de $A_{i_0}$ ?
    (b) Définir le complémentaire de $D_n$ dans $S_n$.
    Montrer que ce complémentaire peut être défini comme la réunion d'une famille de $n$ parties de $S_n$.
    (c) En déduire $d_n = \mathrm{card} D_n$.
    (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d_n}{n!}$

13. Deux personnes se donnent rendez vous entre 16h et 17h. Seulement elles ne se sont pas précisé d'heure précise dans cet intervalle. Ces deux personnes peuvent donc arriver n'importe quand dans cet intervalle de temps. Si une personne arrive avant l'autre elle attendra 15 min et repartira. Quelle est la probabilité pour que les deux personnes ne se rencontrent pas ?

## 2.5 Géométrie

### 2.5.1 Nombres complexes

1. Soient $a$ et $b$ deux complexes. Montrer que $|a-b| = |1-\overline{a}b|$ si et seulement si $|a| = 1$ ou $|b| = 1$.
2. Déterminer les complexes $z$ tels que les points d'affixe $1, z, z^3$ soient alignés.
3. Soit z un complexe de module 1, montrer que soit $|1+z| \geq 1$, soit $|1+z^2| \geq 1$.
4. Soient $a, b, c$ trois complexes de module 1 tels que $a+b+c = 1$. Montrer qu'au moins l'un des complexes est égal à 1.
5. Soit $z$ complexe non nul, on note $p$ et $q$ ses racines carrées. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les points $M$, $P$ et $Q$ (d'affixes resp $z$,$p$,$q$) forment un triangle rectangle en $M$.
6. Chercher $z$ complexe non nul tel que $z$ et ses racines cubiques forment un parallélogramme.
7. (*) Soient $z_1, ..., z_n$ des complexes.
   Montrer qu'il existe une partie $I \subset [1, n]$ telle que $\left|\sum_{i \in I} z_i\right| \geq \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} |z_i|$.
8. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $A \geq 0$. Montrer que $|z| \leq A$ si et seulement si $\forall u \in \mathbb{C}, |Re(zu)| \leq A|u|$.
9. Calculer, pour tout réel $x$, $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$
10. Pour tout réel $x$, simplifier l'expression $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$.
11. Simplifier les sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ pour x non nul.
12. Montrer que, pour tout entier naturel n, $(\sqrt{3}+i)^n + (\sqrt{3}-i)^n$ est réel.
13. Déterminer les parties finies non vides $A$ de $\mathbb{C}$ vérifiant $\forall z \in A, z^2+z+1 \in A$ et $z^2-z+1 \in A$
14. Trouver les parties $A \subset \mathbb{C}$ à 2 puis 3 éléments telles que $z \in A \Rightarrow z^2 \in A$.
15. Trouver le maximum de la fonction $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$.
16. (*) Soient $z_1, z_2, \cdots, z_n$ des complexes vérifiant $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j \Rightarrow |z_i - z_j| \geq 2)$.
    On considère un disque de rayon $R$ contenant les $z_i$. Montrer que $R \geq \sqrt{2\frac{n-1}{n}}$.

### 2.5.2 Géométrie du plan et de l'espace

1. (*) On assimile la Terre à une sphère blanche et on peint 12% de sa surface en noir (donc les 88% sont restés blancs). Montrer l'existence d'un parallélépipède rectangle inscrit dans la Terre à sommets blancs.
2. (*) On prend deux points placés sur un cercle. Comment doit on placer un troisième point pour que la moyenne géométrique des distances soit maximal ?

3. (*) On associe à chaque côté $b$ d'un polygone convexe $P$ le maximum des aires des triangles inclus dans $P$ dont $b$ est un côté. Montrer que la somme des aires associées aux côtés de $P$ est supérieure au double de l'aire de $P$.

4. On considère un triangle $ABC$ supposé non rectangle.
   Soient $I, J, K$ les pieds des hauteurs du triangle $ABC$, issues respectivement de $A, B, C$.
   Soient $M$ et $N$ les projetés orthogonaux respectifs de $I$ sur $(AC)$ et $(AB)$.
   On note $I_1 = S_{AB}(I)$ et $I_2 = S_{AC}(I)$.
   Démontrer que :
   (a) $(MN)//(I_1I_2)$.
   (b) Les points $I, K, J, I_2$ sont alignés.
   (c) La droite $(MN)$ contient les milieux respectifs $J', K'$ de $(I, K)$ et $(I, J)$.

5. On travaille dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ Soit $A$ le point de coordonnées $(-1, 1)$. Soit C, le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2x$.
   Trouver l'équation de toutes les tangentes de C passant par $A$.