Prof :Khammour.Khalil
Année Scolaire :2013/2014

Série d'exercices :
Equations différentielles

$4^{\text{ème}}$ Sc-exp
Tunis ,Tél :27509639

Exercice n°1 :

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte, on demande de la cocher.

1) L'équation différentielle $y = 2y' - 1$ a pour ensemble de solutions :
   a) $y(x) = ke^{2x} - 1$; $k \in$ IR b) $y(x) = ke^{\frac{1}{2}x} + 1$; $k \in$ IR c) $y(x) = ke^{\frac{1}{2}x} - 1$; $k \in$ IR.
2) Parmi ces fonctions laquelle est solution de l'équation différentielle : $y' + y = x + 1$
   a) $f(x) = e^{-x} + 1$ b) $f(x) = e^{-x} + x$ c) $f(x) = e^{-x} + x + 1$.
3) L'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ admet pour solutions les fonctions f définies sur IR par :
   a) $f(x) = ke^{4x}$; $k \in$ IR b) $f(x) = ke^{-4x}$; $k \in$ IR c) $f(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ $a \in IR$; $b \in IR$
4) La fonction f définie sur IR par $f(x) = xe^x$ est solution de l'équation différentielle :
   a) $y' = (1+x)y$ b) $y' = xy$ c) $y' = y + e^x$

Exercice n°2 :

On considère l'équation différentielle : $y' - 2y = \mathrm{xe^x}$ (1).

1) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur IR.
2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur IR par : $u(x)=(ax+b)e^x$.
   a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
   b) Montrer que v est une solution de l'équation (1) si et seulement si v – u est solution de (2).
   c) En déduire les solutions de (1).
3) Déterminer la solution de (1) qui s'annule en 0.

Exercice n°3 :

1) Résoudre l'équation différentielle : $2y' + y = 0$ (E) ,dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur IR.
2) On considère l'équation différentielle : $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ (E')
   a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction f définie sur IR par : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(ax^2 + bx\right)$ soit solution de (E′).
   b) Soit g une fonction définie et dérivable sur IR .Montrer que g est solution de l'équation (E′) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E). Résoudre l'équation (E′).
3) Etudier les variations de la fonction h définie sur IR par : $h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$
4) Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h .
5) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \to e^{-\frac{x}{2}}$.
   a) Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ.
   b) Tracer ces deux courbes sur même graphique.

Exercice n°4 :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 5\cos x$.

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$.

2) Vérifier que g définie sur IR par : $g(x)=\sin x-2\cos x$ est une solution de (E).
3) a) Montrer qu'une fonction f est une solution de (E) si est seulement si $\left(f-g\right)$est solution de (E_0).
4) b) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
5) c) Donner alors la solution de (E) qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.
6) En utilisant ce qui précède, déterminer une solution de l'équation différentielle : $(H): y''-2y'=5\cos x$.

Exercice n°5 :

Soit (E) l'équation différentielle (E) : $y''+y'=e^{-x}; x\in IR$.

1) Soit f une fonction deux fois dérivable sur IR et solution de (E). Montrer que f est solution de (E) si et seulement si f ' est solution de l'équation différentielle (E_1) : $z'+z=e^{-x}$.
2) Soit $g(x)=xe^{-x}$ .Vérifier que g est une solution particulière de (E_1).
3) Soit (E_2) : $z'+z=0$ .Soit φ et h les fonctions définies sur IR par : $h(x)=\varphi(x)-g(x)$.
   a) Montrer que φ est solution de (E_1) si et seulement si h est solution de (E_2).
   b) Résoudre (E_2), et en déduire les solutions de (E_1) puis la solution f de (E) qui vérifie f (0)= f '(0)=0.

Exercice n°6 :

Au début de l'épidémie on constate que 0,01% de la population est contaminé. Pour t appartenant à [0 ,30], on note y (t) le pourcentage des personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc y(0)=0,01.
On admet que la fonction y ainsi définie sur [0 ,30] est dérivable et strictement positive et vérifie :
$y'=0,05y\left(10-y\right)$.

1) On considère la fonction z définie sur l'intervalle [0 ,30] par : $z=\frac{1}{y}$.

   Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0)=0{,}01 \\ y'=0{,}05y\left(10-y\right) \end{cases}$si est seulement si la fonction z satisfait $\begin{cases} z(0)=100 \\ z'=-0{,}5z+0{,}05 \end{cases}$.
2) a) En déduire une expression de la fonction z et celle de la fonction y.
3) b) Calculer le pourcentage de la population infectés après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.
4) Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus on estime que sur la population vaccinée , 92% des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale on estime aussi que 10% des individus sont malades. On choisit au hasard un individu dans cette population.
   a) Montrer que la probabilité de l'événement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.

   b) Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?