Résumé d'algèbre linéaire et géométrie - MP

Essaidi Ali

14 avril 2014

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Arithmétique dans un anneau commutatif intègre :

Proposition 1.1 – *Soient A un anneau commutatif et $I \subset A$. I est un idéal de A ssi $I \neq \emptyset, \forall x, y \in I, x - y \in I$ et $\forall a \in A, \forall i \in I, ai \in I$.*
- *L'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux commutatifs est un idéal.*
- *La somme et l'intersection de deux idéaux d'un anneau commutatif sont des idéaux.*

Proposition 1.2 *$\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal. Si I est un idéal <u>non nul</u> de $\mathbb{K}[X]$ alors il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}[X]$ telque $I = P\mathbb{K}[X]$.*

Proposition 1.3 *Soient $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre et $a \in \mathcal{A}$. a admet un polynôme annulateur non nul ssi $\mathbb{K}[a]$ est de dimension finie. Dans ce cas, π_a existe et $\dim \mathbb{K}[a] = \deg \pi_a$.*
En particulier, si $\mathcal{A}$ est de dimension finie alors tout élément de $\mathcal{A}$ admet un polynôme annulateur non nul.

2 Dualité en dimension finie :

Proposition 2.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in E^*$ alors $\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $\forall x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in E, f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.*

Proposition 2.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists \varphi \in E^*, \varphi(x) = 1$.*

Proposition 2.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.*
- *$\forall i \in \{1, \dots, n\}$, on définit e_i^* par $\forall x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in E, e_i^*(x) = x_i$. Alors $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*, on l'appelle la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.*
- *Soit $\mathcal{B}$ une base de E^*, alors il existe une et une seule base $\mathcal{C}$ de E telle que la base $\mathcal{B}$ soit la base duale de $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ s'appelle la base antéduale ou préduale de $\mathcal{B}$.*

Proposition 2.4 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si H est un supplémentaire de $\ker u$ dans E alors H et $\mathrm{Im} u$ sont isomorphes.*

Proposition 2.5 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Si G et H sont deux supplémentaires de F alors la projection sur G parallèlement à F définit un isomorphisme de H vers G. En particulier :*
- *Tous les supplémentaires de F sont isomorphes.*
- *Si F admet un supplémentaire de dimension finie alors cette dimension ne dépend pas du supplementaire choisi. On l'appelle la codimension de F et on la note $\mathrm{codim} F$.*
- *Si F admet un supplémentaire de dimension infinie alors tous les supplémenaires de F sont de dimension infinie. Dans ce cas, on dit que F est de codimension infinie.*

Proposition 2.6 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $H \subset E$.*
- *H est un hyperplan de E si et seulement si $H \neq E$ et $\exists x \in E, E = H \oplus \mathbb{K}x$. Dans ce cas, $\forall x \in E \setminus H, E = H \oplus \mathbb{K}x$.*
- *H est un hyperplan de E si et seulement si $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0\}, H = \ker \varphi$.*

Proposition 2.7 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi, \psi \in E^* \setminus \{0\}$. $\ker \varphi = \ker \psi \iff (\varphi, \psi)$ lié.*

Proposition 2.8 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.*
- *Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $0 \leq p < n$ alors il existe $n - p$ formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-p}$ linéairement indépendantes telles que $F = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n-p} \ker \varphi_i$.*

– *Si* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ *alors* $\operatorname{codim} \bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i = \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.
– *Si* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi \in E^*$ *alors* $\varphi \in \operatorname{Vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\} \iff \bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi$.

3 Réduction des endomorphismes :

Proposition 3.1 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Si* $(E_i)_{i \in I}$ *est une famille de sous-espaces vectoriels de* E *stables par* u *alors* $\sum_{i \in I} E_i$ *et* $\bigcap_{i \in I} E_i$ *sont* u*-stables.*

Proposition 3.2 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $u, v \in \mathcal{L}(E)$ *tels que* $uv = vu$*. Alors* $\forall P \in \mathbb{K}[X], \operatorname{Im}P(v)$ *et* $\ker P(v)$ *sont* u*-stables. En particulier, si* E *est de dimension finie,* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, E_\lambda(v)$ *est* u*-stable.*

Théorème 3.1 ***(Théorème de décomposition des noyaux)*** *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Si* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *tels que* $P \wedge Q = 1$ *alors* $\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$*.*

Proposition 3.3 – *Dans un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie, tout endomorphisme de* E *admet un polynôme minimal.*
– *Toute matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *admet un polynôme minimal.*

Proposition 3.4 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $u \in \mathcal{L}(E)$*. On suppose que* u *admet un polynôme annulateur non nul.*
– *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *alors* E *admet une droite vectorielle* u*-stable.*
– *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *alors* E *admet une droite vectorielle ou un plan vectoriel* u*-stable.*

Proposition 3.5 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $u \in \mathcal{L}(E)$*,* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *une valeur propre de* u*. Alors :*
– $P(\lambda)$ *est une valeur propre de* $P(u)$*.*
– *Si* P *est annulateur de* u *alors* λ *est une raçine de* P*.*

Proposition 3.6 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $(\lambda_i)_{i \in I}$ *une famille de valeurs propres de* u *deux à deux distincts.*
– *Si* $(x_i)_{i \in I}$ *est une famille de vecteurs propres de* u *telles que* $\forall i \in I, x_i$ *est associé à* λ_i *alors la famille* $(x_i)_{i \in I}$ *est libre.*
– *La somme* $\sum_{i \in I} E_{\lambda_i}(u)$ *est directe.*

Corollaire 3.7 *Si* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^*$ *alors tout endomorphisme de* E *admet au plus* n *valeurs propres.*

Propriété 3.1 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathcal{E}$*.*
– $\lambda \in \mathcal{S}p(u) \Leftrightarrow \lambda \in \mathcal{Z}(\chi_u)$ *où* $\mathcal{Z}(\chi_u)$ *désigne l'ensemble des raçines de* χ_u*.*
– $\deg \chi_u = \dim E$ *et* $\chi_u = (-1)^n (X^n - \operatorname{tr}(u) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u)$*.*
– *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ou* χ_u *scindé alors :*
  1. $\mathcal{S}p(u) \neq \phi$ *donc* u *admet au moins une valeur propre.*
  2. $\operatorname{tr} u = \sum_{\lambda \in \mathcal{S}p(u)} \lambda$ *et* $\det u = \prod_{\lambda \in \mathcal{S}p(u)} \lambda$ *où les valeurs propres sont comptées avec leurs ordres de multiplicités comme raçines de* χ_u*.*

Proposition 3.8 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Si* $\lambda \in \mathcal{S}p(u)$ *alors* $(X - \lambda)^{\dim E_\lambda(u)} | \chi_u$*. En particulier,* $\dim E_\lambda(u) \leq \mathrm{m}(\lambda)$*.*

Théorème 3.2 ***(Théorème de Cayley-Hamilton)*** *Soit* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Si* $u \in \mathcal{L}(E)$ *alors* $\chi_u(u) = 0$*. Autrement dit,* χ_u *est annulateur de* u*.*

Corollaire 3.9 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Alors :*
– $\pi_u | \chi_u$*. En particulier,* $\deg \pi_u \leq \dim E$*.*
– $\mathcal{S}p(u) = \mathcal{Z}(\chi_u) = \mathcal{Z}(\pi_u)$*.*
– χ_u *est scindé* $\iff$ π_u *est scindé.*

Théorème 3.3 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
– u *est diagonalisable.*

– *E admet une base formée de vecteurs propre de u.*
– $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{S}p(u)} E_\lambda(u)$.
– $\dim E = \sum_{\lambda \in \mathcal{S}p(u)} \dim E_\lambda(u)$.
– *u admet un polynôme annulateur scindé à raçines simples.*
– *χ_u scindé et $\forall \lambda \in \mathcal{S}p(u), \dim E_\lambda(u) = \mathrm{m}(\lambda)$.*

Corollaire 3.10 *Si u admet n valeurs propres deux à deux distinctes alors u est diagonalisable.*

Théorème 3.4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
– *u est nilpotent.*
– *u est trigonalisable et $\mathcal{S}p(u) = \{0\}$.*
– $\chi_u = (-1)^n X^n$.

Théorème 3.5 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. u est trigonalisable ssi u admet un polynôme annulateur scindé. En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.*

Théorème 3.6 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel u-stable et $v = u_F$. Alors :*
– *$\pi_v | \pi_u$ et $\chi_v | \chi_u$.*
– *$\mathcal{S}p(v) \subset \mathcal{S}p(v)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, E_\lambda(v) = E_\lambda(u) \cap F$.*
– *Si u est diagonalisable (resp. trigonalisable) alors v est diagonalisable (resp. trigonalisable).*

4 Espaces préhilbertiens :

Définition 4.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
– *Une application $f : E \to \mathbb{K}$ est dite forme semi-linéaire sur E si :*
  1. $\forall x, y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
  2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x)$.
– *Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est dite forme sesquilinéaire sur E si :.*
  1. *$\forall x \in E, y \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E.*
  2. *$\forall y \in E, x \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme semi-linéaire sur E.*

Définition 4.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E tout application φ de $E \times E$ vers $\mathbb{K}$ telle que :*
– *φ est une forme sesquilinéaire sur E.*
– *$\forall x, y \in E, \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$. On dit que φ est hermitienne.*
– *$\forall x \in E, \varphi(x, y) \geq 0$. On dit que φ est positive.*
– *$\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$. On dit que φ est définie.*
Dans ce cas, l'espace E muni du produit scalaire φ est dit espace préhilbertien.

Propriétés 4.1 ***(Règles de calcul dans un espace préhilbertien)*** *Soit E un espace préhilbertien. Alors :*
– $\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \|\alpha x + \beta y\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 + 2\Re e(\bar{\alpha}\beta < x, y >) + |\beta|^2 \|y\|^2$.
– ***Identité du parallèlogramme :*** $\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
– ***(Formules de polarisation)*** *:*
  1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $\forall x, y \in E, < x, y >= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.*
  2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $\forall x, y \in E, < x, y >= \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x-iy\|^2) = \dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \dfrac{1}{i^k}\|x + i^k y\|^2$.*

Proposition 4.1 *Soit E un espace préhilbertien.*
– ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*** *: $\forall x, y \in E, | < x, y > | \leq \|x\|\|y\|$ avec égalité si et seulement si (x, y) lié.*
– ***(Inégalité de Minkowsky)*** *: $\forall x, y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ avec égalité si et seulement si (x, y) est positivement lié.*
– *L'application $x \mapsto \|x\|$ est une norme sur E appelée la norme euclidienne associée au produit scalaire sur E.*
– *L'application $(x, y) \mapsto \|x-y\|$ est une distance sur E appelée la distance euclidienne associée au produit scalaire sur E.*

Proposition 4.2 *Soit E un espace préhilbertien.*
– *Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.*

– ***(Théorème de Pythagore)*** *Si* $(x_1,\ldots,x_n)$ *une famille orthogonale de vecteurs de* E *alors* $\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.

Propriétés 4.2 *Soient* E *un espace préhilbertien et* $A, B \subset E$. *Alors :*
- $A \perp A^{\perp}$.
- $A \perp B \iff A \subset B^{\perp} \iff B \subset A^{\perp}$.
- $A \subset A^{\perp\perp}$.
- $A^{\perp}$ *est un sous-espace vectoriel de* E.
- $A \cap A^{\perp} = \phi$ *ou* $A \cap A^{\perp} = \{0\}$.
- $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- $A^{\perp} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$.
- $A \perp B \iff A \perp \mathrm{Vect}(B) \iff \mathrm{Vect}(A) \perp B \iff \mathrm{Vect}(A) \perp \mathrm{Vect}(B)$.

Proposition 4.3 *Soient* E *un espace préhilbertien et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Alors :*
- $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. *En particulier, la somme* $F + F^{\perp}$ *est directe.*
- *Si* $F \perp G$ *alors la somme* $F+G$ *est directe. Généralement, si* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille orthogonale de sous-espaces vectoriels de* E. *Alors la somme* $\sum_{i\in I} F_i$ *est directe.*
- $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.
- $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

Proposition 4.4 ***(Orthonormalisation de Gram-Schmidt)*** *Soient* E *un espace préhilbertien et* $(e_1,\ldots,e_n)$ *une famille libre de* E.
Il existe une et une seule famille orthonormée $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ *de* E *telle que :*

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \begin{cases} \mathrm{Vect}\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\} = \mathrm{Vect}\{e_1,\ldots,e_k\} \\ <\varepsilon_k, e_k> > 0 \end{cases}$$

La famille orthonormée $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ *est donnée par :*
- $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.
- $\forall k \in \{2,\ldots,n\}, \varepsilon_k = \dfrac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} <\varepsilon_i, e_k> \varepsilon_i}{\left\|e_k - \sum_{i=1}^{k-1} <\varepsilon_i, e_k> \varepsilon_i\right\|}$.

Corollaire 4.5 *Soit* E *un espace préhilbertien de dimension finie non nulle. Alors :*
- E *admet une base orthonormale.*
- *Toute famille orthonormale de* E *se complète en une base orthonormale de* E.

Proposition 4.6 *Soient* E *un espace préhilbertien de dimension finie et* F, G *deux sous espaces vectoriels de* E. *Alors :*
- $F \oplus F^{\perp} = E$. *En particulier,* $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$.
- $F^{\perp\perp} = F$.
- $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Définition 4.3 *Soit* E *un espace prhilbertien.*
- *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E.
  1. *Si* $F \perp G$ *alors on dit que* F *et* G *sont en somme directe orthogonale et on note* $F \overset{\perp}{\oplus} G$.
  2. *Si* $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$ *alors on dit que* F *et* G *sont supplémentaires orthogonaux.*
- *Si* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille orthogonale de sous-espaces vectoriels de* E *alors on dit que les* F_i *pour* $i \in I$ *sont en somme directe orthogonale et on note* $\overset{\perp}{\bigoplus_{i\in I}} F_i$.

Proposition 4.7 *Soit* E *un espace prhilbertien.*
- *Si* E *est de dimension finie alors tout sous-espace vectoriel de* E *admet un supplémentaire orthogonal.*
- *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Si* F *admet un supplémentaire orthogonal* G *alors* $G = F^{\perp}$. *Autrement dit, le supplémentaire orthogonal de* F, *lorsqu'il existe, est unique c'est* $F^{\perp}$.

Définition 4.4 *Soit* E *un espace prhilbertien.*

– *Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E$. On appelle projection (resp. symétrie) orthogonale sur (resp. par rapport à) F la projection sur (resp. symétrie par rapport à) F parallèlement à $F^{\perp}$. On la note p_F (resp. s_F).*
– *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un projecteur orthogonal (resp. symétrie orthogonale) si $u \circ u = u$ et $\mathrm{Im} u \overset{\perp}{\oplus} \ker u = E$ (resp. $u \circ u = \mathrm{id}_E$ et $\ker(u + \mathrm{id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \ker(u - \mathrm{id}_E) = E$).*
– *Soit $(F_1, \ldots, F_n)$ une famille orthogonale de sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_n = E$. On appelle projecteurs orthogonaux associés (resp. symétries orthogonales associées) à la somme directe orthogonale $F_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_n = E$ les applications $p_1, \ldots, p_n$ (resp. $s_1, \ldots, s_n$) sur E définies par :*
$\forall x = x_1 + \cdots + x_n \in E$, avec $(x_1, \cdots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, p_i(x) = x_i$ (resp. $s_i(x) = x - 2p_i(x) = x - 2x_i = x_1 + \cdots + x_{i-1} - x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n$).

Proposition 4.8 *Soient E un espace préhilbertien, F un sous espace vectoriel de E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de F. Alors :*
– *$F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E$. Autrement dit, tout sous-espace vectoriel de E de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal.*
– *$F^{\perp}$ est de codimension finie et on a $\mathrm{codim} F^{\perp} = \dim F$.*
– *$F^{\perp\perp} = F$.*

Proposition 4.9 *Soient E un espace préhilbertien, F un sous espace vectoriel de E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de F alors $\forall x \in E$, $p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < e_k, x > e_k$.*

Proposition 4.10 *Soient E un espace préhilbertien, F un sous espace vectoriel de E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de F et $x \in E$. Alors :*
– *$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$, $p_F(x)$ est le seul élément de F qui vérifie cette égalité.*
– *$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d^2(x, F)$.*
– ***L'inégalité de Bessel :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} | < e_k, x > |^2 \leq \|x\|^2$ avec égalité ssi $x \in F$.*

Définition 4.5 *On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet pour la norme euclidienne associée.*

Définition 4.6 *Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{H}$ est dite base hilbertienne (ou famille orthonormale totale ou famille orthonormale complète) de $\mathbb{H}$ si elle vérifie les deux conditions suivantes :*
– *La famille $(e_i)_{i \in I}$ est orthonormale : $\forall i, j \in I, < e_i, e_j >= \delta_{ij}$.*
– *La famille $(e_i)_{i \in I}$ est totale (ou complète) : $\{e_i / i \in I\}^{\perp} = \{0\}$.*

Proposition 4.11 *Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de $\mathbb{H}$ et (c_n) une famille d'élémens de $\mathbb{K}$ carrée sommable (i.e $\sum |c_n|^2$ converge). Alors la série $\sum c_n e_n$ est convergente.*

Définition 4.7 *Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathbb{H}$ et $x \in \mathbb{H}$.*
– *On appelle coefficient de Fourier d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de x le nombre $< e_n, x >$.*
– *$\displaystyle\sum_{n \geq 0} < e_n, x > e_n$ s'appelle la série de Fourier de x.*
– *$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{S}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} < e_k, x > e_k$ s'appelle la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de x.*

Proposition 4.12 *Soient $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathbb{H}$. Alors :*
– *$\forall x, y \in \mathbb{H}, x = y \iff x$ et y ont les mêmes coefficients de Fourier (i.e $\forall n \in \mathbb{N}, < e_n, x >=< e_n, y >$).*
– *$\forall x \in \mathbb{H}$, la série $\sum < e_n, x > e_n$ converge et on a $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} < e_n, x > e_n$.*
– *$\forall x \in \mathbb{H}, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} | < e_n, x > |^2 = \|x\|^2$ **(Formule de Parseval)**.*
– *$\forall x, y \in \mathbb{H}$, la série $\sum \overline{< e_n, x >} < e_n, y >$ est absolument convergente et on a $< x, y >= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{< e_n, x >} < e_n, y >$.*

Proposition 4.13 *Soit E un espace euclidien. Pour tout $a \in E$, on pose $\begin{array}{rccc} f_a : & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & < a, x > \end{array}$.*
L'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \to & E^* \\ & a & \mapsto & f_a \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On l'appelle l'isomorphisme canonique de E sur

E^*.
En particulier, $\forall f \in E^*, \exists! a \in E, \forall x \in E, f(x) =< a, x >$.

Proposition et définition 4.1 *Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. $\exists! v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E, < u(x), y >=< x, v(y) >$.*
L'endomorphisme v s'appelle l'adjoint de u et on le note u^*.

Propriété 4.1 *Soient E un espace euclidien et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*
- *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha u + \beta v)^* = \alpha u^* + \beta v^*$.*
- *$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.*
- *$(u^*)^* = u$.*
- *Si u est inversible alors u^* est inversible et on a $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.*
- *L'application $f \mapsto f^*$ est un automorphisme sur $\mathcal{L}(E)$.*
- *$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(u^*) = (P(u))^*$. En particulier, $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(u) = 0 \iff P(u^*) = 0$.*

Proposition 4.14 *Soient E un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$.*
- *Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E alors $\mathrm{mat}(u^*, \mathcal{B}) = {}^t\mathrm{mat}(u, \mathcal{B})$.*
- *$\ker u^* = (\mathrm{Im} u)^\perp$ et $\mathrm{Im} u^* = (\ker u)^\perp$.*
- *Soit F un sous-espace vectoriel de E. F est u-stable ssi $F^\perp$ est u^*-stable.*

Proposition 4.15 ***(Caractérisation des automorphismes orthogonaux)*** *Soient E un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *$\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.*
- *$\forall x, y \in E$, $< u(x), u(y) >=< x, y >$.*
- *$u \circ u^* = u^* \circ u = \mathrm{id}_E$. Autrment dit, u inversible et $u^{-1} = u^*$.*
- *L'application u transforme toute base orthnormale de E par u est une base orthonormale de E.*
- *L'application u transforme au moins une base orthnormale de E par u est une base orthonormale de E.*

Dans ce cas, on dit que u est orthogonal.

Proposition 4.16 *Soient E un espace euclidien non nul, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $M = \mathrm{mat}(u, \mathcal{B})$. Les assertion suivantes sont équivalentes :*
- *u est orthogonal.*
- *$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), \|MX\| = \|X\|$ ($\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel $< X, Y >=^t XY$).*
- *$M^tM = {}^tMM = I_n$. Autrement dit, M est inversible d'inverse $M^{-1} = {}^tM$.*
- *Les colonnes de la matrice M forment une BON de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.*

Proposition et définition 4.2 *Soient E un espace euclidien non nul. Alors $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{SO}(E)$ sont des sous-groupes de $(GL(E), \circ)$.*
- *$\mathcal{O}(E)$ s'appelle le groupe orthogonale de E.*
- *$\mathcal{SO}(E)$ s'appelle le groupe spécial orthogonal de E. Les éléments de $\mathcal{SO}(E)$ s'appellent rotations.*

Proposition 4.17 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace euclidien de dimension n.*
- *$\mathcal{O}(n)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathcal{O}(E)$. On l'appelle le groupe orthogonal d'ordre n.*
- *$\mathcal{SO}(n)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathcal{SO}(E)$. On l'appelle le groupe spécial orthogonal d'ordre n.*

Proposition 4.18 *Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonale.*

Définition 4.8 *On appelle réflexion toute symétrie par rapport à un hyperplan.*

Définition 4.9 *Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.*
- *u est dit symétrique ou autoadjoint si $u^* = u$.*
- *u est dit antisymétrique si $u^* = -u$.*

Proposition 4.19 ***(Caractérisation des endomorphismes autoadjoints)*** *Soient E un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *u symétrique.*
- *$\forall \mathcal{B}$ une base orthnormale de E, mat$(u, \mathcal{B})$ est symétrique.*
- *$\exists \mathcal{B}$ une base orthnormale de E, mat$(u, \mathcal{B})$ est symétrique.*

Proposition 4.20 *Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à $\mathcal{S}(n)$. On le note $\mathcal{S}(E)$ et on a $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Proposition 4.21 ***(Caractérisation des projecteurs et symétries orthogonaux)*** *Soit E un espace euclidien.*
- *p est un projecteur orthogonal si et seulement si $p^2 = p$ et $p^* = p$.*

– *s est un symétrie orthogonals si et seulement si $s^2 = id_E$ et $s^* = s$.*

Proposition 4.22 *Soient E un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors :*
– *Toutes les valeurs propres de u sont réelles.*
– *$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{S}p(u)$ avec $\lambda \neq \mu$, $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux. En particulier, les espaces propres de u sont en somme est directe orthogonale.*
– *Soit F un sous-espace vectoriel de E. F est u-stable ssi $F^\perp$ est u-stable.*
– ***(Théorème spectral)** u est diagonalisable dans une base orthonormale de E.*

Corollaire 4.23 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}(n)$. Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit diagonal.*

Définition 4.10 *Soient E un espace euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{S}(E)$ et $M \in \mathcal{S}(n)$. On dit que :*
– *L'endomorphisme u est positif si $\forall x \in E, < u(x), x >\geq 0$.*
– *La matrice M est positive si $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXMX \geq 0$.*
– *L'ensomorphisme u est défini positif si $\forall x \in E \setminus \{0\}, < u(x), x >> 0$.*
– *La matrice M est définie positive si $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXMX > 0$.*

Proposition 4.24 *Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une BON de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \mathrm{mat}(u, \mathcal{B})$. Alors :*
– $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff M \in \mathcal{S}^+(n)$.
– $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff M \in \mathcal{S}^{++}(n)$.

Proposition 4.25 *Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*
– *$u \circ u^*$ et $u^* \circ u$ sont symétriques positifs.*
– *Si u est inversible alors. $u \circ u^*$ et $u^* \circ u$ sont symétriques positifs définis.*

Proposition 4.26 ***(caractérisation)** Soient E un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{S}(E)$.*
– $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \forall \lambda \in \mathcal{S}pu, \lambda \geq 0$.
– $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \forall \lambda \in \mathcal{S}pu, \lambda > 0$.

Définition 4.11 *Soient E un espace euclidien non nul et $x_1, \ldots, x_p \in E$. On appelle :*
– *Matrice de Gram des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ la matrice $\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p) = (< x_i, x_j >)_{1 \leq i,j \leq p}$.*
– *Déterminant de Gram des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ le déterminant $\Gamma(x_1, \ldots, x_p) = \det \mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p)_{1 \leq i,j \leq p}$.*

Propriétés 4.3 *Soient E un espace euclidien non nul et $x_1, \ldots, x_p \in E$. Alors :*
– *$\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p)$ est symétrique positive.*
– *Soit $\mathcal{B}$ une BON de E. $\Gamma(x_1, \ldots, x_p) = \det^2_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p)$. En particulier, $\Gamma(x_1, \ldots, x_p) \geq 0$.*
– $\forall k \in \{1, \ldots, p\}, \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}, \Gamma(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \alpha_i x_i, x_{k+1}, \ldots, x_p) = \Gamma(x_1, \ldots, x_p)$.
Autrement dit, le déterminant de Gram reste inchangé si on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs.
– $\forall \sigma \in \mathcal{S}_p, \Gamma(x_{\sigma(1)}, \ldots, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \Gamma(x_1, \ldots, x_p)$.
– $\mathrm{rg}\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p) = \mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p)$.
– *$(x_1, \ldots, x_p)$ libre $\iff \mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{S}^{++}(p) \iff \mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p)$ est inversible.*

Corollaire 4.27 *Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
A est symétrique définie positive si et seulement si A est la matrice de Gram d'une base de E.

Proposition 4.28 ***(Décomposition polaire d'un endomorphisme inversible)***
Soient E un espace euclidien et $u \in GL(E)$. Alors $\exists! o \in \mathcal{O}(E), \exists! s \in \mathcal{S}^{++}(E), u = os$.

Proposition 4.29 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
– ***Décomposition polaire d'une matrice inversible :** Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $\exists! O \in \mathcal{O}(n), \exists! S \in \mathcal{S}^{++}(n), A = OS$.*
– ***Factorisation QR d'une matrice inversible :** Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors A se décompose de façon unique sous la forme $A = QR$ où Q est orthogonal et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.*
– ***Factorisation de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive :** Si $A \in \mathcal{S}^{++}(n)$ alors A se décompose de façon unique sous la forme $A = {}^tTT$ où T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.*

Proposition 4.30 *Soient E est un plan euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $u \in O(E)$ et $A = \mathrm{mat}(u, \mathcal{B})$.*
$\exists \theta \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon = \pm 1$ tels que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon \cos\theta \end{pmatrix}$.

Proposition 4.31 *L'application* $\begin{array}{llll} R: & (\mathbb{R},+) & \to & (SO(2),\times) \\ & \theta & \mapsto & R(\theta) \end{array}$ *est un morphisme de groupes surjectif.*
On l'appelle le morphisme canonique de $\mathbb{R}$ *vers* $SO(2)$.

Propriété 4.2
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \det R(\theta) = 1$.
- $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$. *En particulier,* $SO(2)$ *est abélien.*
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, {}^tR(\theta) = R(-\theta) = (R(\theta))^{-1}$.

Proposition et définition 4.3 *Soient* E *un plan euclidien orienté et* $u \in SO(E)$.
Si $R(\theta)$ *est la matrice de* u *dans une base orthonormée directe de* E *alors* $R(\theta)$ *ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe de* E.
u *s'appelle la rotation vectorielle d'angle* θ *et on la note* r_θ. *En particulier, les angles d'une rotation sont congrus modulo* 2π.

Proposition 4.32 *Soient* E *un plan euclidien et* $u \in O^-(E)$. *Il existe une base orthonormée* $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ *de* E *telle que* $\operatorname{mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
u *est la symétrie orthogonale par rapport à la droite* $D = \mathbb{R}e_1$ *et on la note* s_D.

Proposition 4.33 *Soit* E *un espace euclidien,* $\mathcal{B}$ *une BON de* E, $u \in O^-(E)$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\operatorname{mat}(u, \mathcal{B}) = S(\theta)$.
u *est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle* $\mathbb{R}e$ *où* $e = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$.

Propriété 4.3
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \det S(\theta) = -1$.
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, {}^tS(\theta) = S(\theta) = (S(\theta))^{-1}$.
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, S(\theta)^2 = I_2$.
- $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, S(\theta')S(\theta) = R(\theta' - \theta)$. *En particulier,* $O^-(2)$ *n'est ni abélien ni stable.*

Proposition 4.34 *Soit* E *un plan euclidien et* $f \in \mathcal{A}ff(E)$.
- *Si* f *fixe* 3 *points non alignés alors* f *est l'identité sur* E.
- *Si* $\vec{f} = Id_E$ *alors* f *est une translation.*

Proposition et définition 4.4 *Soient* E *un plan euclidien orienté et* f *un déplacement sur* E *avec* $\vec{f} \neq \mathrm{Id}_E$.
f *possède un unique point fixe* $\Omega \in E$. *On dit que* f *est la rotation de centre* Ω *et d'angle* θ *l'angle de la rotation vectorielle associée* $\vec{f}$. f *se note* $r(\Omega, \theta)$.

Corollaire 4.35 *Tout déplacement d'un plan euclidien orienté est soit une translation, soit une rotation affine.*

Corollaire 4.36 *Soit* E *un plan euclidien orienté :*
- $\forall a, b \in E, t_a \circ t_b = t_{a+b} = t_b \circ t_a$.
- *Soient une translation* t *et une rotation affine* $r \neq \mathrm{Id}_E$ *dans* E. *Alors* $r \circ t$ *et* $t \circ r$ *sont des rotation d'angle celui de* r.
- *Soient deux rotations affines* $r = r(\Omega, \theta)$ *et* $r' = r(\Omega', \theta')$ *dans* E. *Alors :*
  1. *Si* $\theta' + \theta \equiv 0[2\pi]$ *alors* $r' \circ r = t_u$ *avec* $u = \overrightarrow{\Omega\Omega''}$ *où* $\Omega'' = r'(\Omega)$.
  2. *Si* $\theta' + \theta \not\equiv 0[2\pi]$ *alors* $r' \circ r$ *est une rotation d'angle* $\theta' + \theta$.

Proposition 4.37 *Soient* E *un plan euclidien et* f *un antidéplacement.*
Si f *admet au moins un point fixe* A *alors* f *est la symétrie orthogonale par rapport à une droite* $D = A + E_1(\vec{f})$.
f *se note* s_D *et on dit aussi que* f *est la symétrie axiale d'axe* D.

Proposition 4.38 *Soit* E *un plan euclidien.*
- *Soient* D *et* Δ *deux droites affines parallèles de* E *alors* $s_\Delta \circ s_D$ *est la translation* t_u *de vecteur* u *normal à* D *et tel que* $\Delta = t_{\frac{1}{2}u}(D) = D + \frac{1}{2}u$.
- *Réciproquement, soit* t_u *une translation sur* E. *Si* D *est une droite affine* D *de* E *telle que* u *soit normal à* D *alors la translation* t_u *se décompose sous la forme* $t_u = s_\Delta \circ s_D$ *(resp.* $t_u = s_D \circ s_\Delta$*) où* $\Delta = t_{\frac{1}{2}u}(D) = D + \frac{1}{2}u$ *(resp.* $\Delta = t_{-\frac{1}{2}u}(D) = D - \frac{1}{2}u$*).*

Proposition 4.39 *Soit* E *un plan euclidien orienté.*
- *Soient deux droites affines* D *et* Δ *de* E *non parallèles. On pose* $D \cap \Delta = \{\Omega\}$ *et* $(D, \Delta) \equiv \frac{\theta}{2}[\pi]$ *alors* $s_\Delta \circ s_D = r(\Omega, \theta)$.
- *Réciproquement, Soit* $r = r(\Omega, \theta)$ *une rotation affine sur* E. *Si* D *est une droite affine de* E *qui passe par* Ω *alos* r *se décompose sous la forme* $r = s_\Delta \circ s_D$ *(resp.* $r = s_D \circ s_\Delta$*) avec* Δ *la droite affine de* E *qui passe par* Ω *et telle que* $(D, \Delta) \equiv \frac{\theta}{2}[\pi]$ *(resp.* $(\Delta, D) \equiv \frac{\theta}{2}[\pi]$*).*

Corollaire 4.40 *Tout déplacement d'un plan euclidien orienté est la composée de deux symétries axiales.*

Proposition et définition 4.5 *Soient E un espace euclidien et f un antidéplacement de E sans points fixes.*
f se décompose de façon unique sous la forme $f = s_D \circ t_u = t_u \circ s_D$.
f s'appelle la symétrie glissée d'axe D et de vecteur u et on a, en plus, u est un vecteur directeur non nul de D.

Corollaire 4.41 *Les antidéplacements d'un plan euclidiens sont exactement les symétries axiales et les symétries glissées.*

Proposition 4.42 *Les symétries axiales engendrent le groupe des isométries du plan euclidien orienté.*

Proposition 4.43 *Soit E un plan euclidien orienté.*
- *Soient une translation t_u et une symétrie axiale s_D telles que u ne soit pas normal à D. Alors $t_u \circ s_D$ et $s_D \circ t_u$ sont des symétries glissées.*
- *Soient une rotation affine $r(\Omega, \theta) \neq \mathrm{id}_E$ et s_D une symétrie axiale telles que $\Omega \notin D$. Alos $r(\Omega, \theta) \circ s_D$ et $s_D \circ r(\Omega, \theta)$ sont des symétries glissées.*

Proposition et définition 4.6 *Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $f \in SO(E)$ tel que $f \neq \mathrm{id}_E$.*
Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) dans laquelle la matrice de f est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
f s'appelle la rotation d'axe $\mathbb{R}e_1$ orienté par e_1 et d'angle θ. On la note $r_{e_1,\theta}$.

Proposition 4.44 *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.*
- *Soit $e \in E$. L'application $\varphi_e : x \in E \mapsto e \wedge x$ est antisymétrique.*
- *Soit $\mathcal{A}(E)$ l'espace des endomorphismes antisymétriques sur E. L'application $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{A}(E) \\ x & \mapsto & \varphi_x \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Proposition 4.45 *Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $e \in E$ unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :*
- ***(Formule de Rodriguès)** : $\forall x \in E, r_{e,\theta}(x) =< e, x > e + \cos(\theta)(x- < e, x > e) + \sin(\theta)(e \wedge x)$.*
- *$r_{e,\theta} = \mathrm{Id}_E + \sin\theta\varphi_e + (1 - \cos\theta)\varphi_e^2$.*
- *Si $r = r_{e,\theta}$ alors alors $r - r^* = 2\sin\theta\varphi_e$.*
- *$r_{e,\theta} = \exp(\theta\varphi_e)$.*

Proposition 4.46 *Soient E un espace euclidien de dimension 3 et $f \in \mathcal{A}\{\{(E)$.*
- *Si f fixe 4 points affinement libres alors f est l'identité.*
- *Si $\vec{f} = \mathrm{id}_E$ alors f est une translation de vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$ où A est un point quelconque de E.*

Proposition et définition 4.7 *Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et f un déplacement sur E tel que $\vec{f} \neq Id_E$.*
On suppose que f admet au moins un point fixe $A \in E$. Alors :
- *$\exists e \in E, \exists\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0[2\pi]$ tels que $\vec{f} = r_{e,\theta}$.*
- *L'ensemble des points fixes de f est la droite $D = A + \mathbb{R}e$.*

On dit que f est la rotation affine d'axe D orienté par e et d'angle θ. On la note $r_{D,e,\theta}$.

Proposition et définition 4.8 *Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et f un déplacement de E sans points fixes et tel que $\vec{f} \neq \mathrm{id}_E$.*
f se décompose de façon unique sous la forme $f = t_x \circ r = r \circ t_x$ avec r une rotation affine et $x \in E \setminus \{0\}$.
Soit $e \in E$ unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $r = r_{D,e,\theta}$, f s'appelle le vissage de vecteur x, d'axe $\mathcal{D}$ orienté par e et d'angle θ. On le note $V_{D,e,\theta,x}$.
On a, en particulier, (x, e) lié.

Proposition 4.47 *Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $f = V_{D,e,\theta,x}$ un vissage.*
- *$\forall M \in D, \overrightarrow{Mf(M)} = x$.*
- *$\forall M \in E, M \in D \iff (\overrightarrow{Mf(M)}, e)$ est lié.*

Proposition 4.48 *Tout déplacement de E est soit une translation, soit une rotation affine, soit un vissage.*

5 Formes quadratiques :

Proposition 5.1 *Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. L'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$ noté $\mathcal{L}(E, F; \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(E \times F, \mathbb{R})$ des applications de $E \times F$ vers $\mathbb{R}$.*

Proposition 5.2 *Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.*

– *Soit* $\varphi \in \mathcal{L}(E,F;\mathbb{R})$ *:*
  – $\forall y \in F$, *on pose* $\begin{array}{cccc} \varphi_y : & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array}$. *Alors* $\forall y \in F, \varphi_y \in E^*$.
  – *On pose* $\begin{array}{cccc} \tilde{\varphi} : & F & \to & E^* \\ & y & \mapsto & \varphi_y \end{array}$. *Alors* $\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}(F,E^*)$.
– *L'application* $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F;\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(F,E^*) \\ \varphi & \mapsto & \tilde{\varphi} \end{array}$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On l'appelle l'isomorphisme canonique de* $\mathcal{L}(E,F;\mathbb{R})$ *vers* $\mathcal{L}(F,E^*)$ *et on dit que* $\mathcal{L}(E,F;\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{L}(F,E^*)$ *sont canoniquement isomorphes.*

Définition 5.1 *Soient* E,F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles respectives* m *et* n*. Soient* $\mathcal{B}_E = (e_1,\dots,e_m)$ *une base de* E*,* $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ *une base de* F *et* $\varphi \in \mathcal{L}(E,F;\mathbb{R})$*.*
On appelle matrice de φ *dans les bases* $\mathcal{B}_E$ *et* $\mathcal{B}_F$ *la matrice* $(\varphi(e_i,\varepsilon_j))_{1\le i\le m;1\le j\le n}$ *et on la note* $\mathrm{mat}(\varphi,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)$*.*
Si $E=F$ *et* $\mathcal{B}_E=\mathcal{B}_F$ *alors* $\mathrm{mat}(\varphi,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)$ *se note tout simplement* $\mathrm{mat}(\varphi,\mathcal{B}_E)$*.*

Caractérisation 5.1 *Soient* E,F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles respectives* m *et* n*.*
Si $\mathcal{B}_E$ *est une base de* E*,* $\mathcal{B}_F$ *une base* F*,* $\varphi \in \mathcal{L}(E,F;\mathbb{R})$ *et* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *alors :*
$A = \mathrm{mat}(\varphi,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F) \iff \forall x\in E, \forall y \in F, \varphi(x,y) = {}^tXAY$ *avec* $X=[x]_{\mathcal{B}_E}$ *et* $Y=[y]_{\mathcal{B}_F}$*.*

Proposition 5.3 ***(Formule de changement de bases)*** *Soient* E,F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles,* $\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E$ *deux bases de* E*,* $\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F$ *deux bases de* F *et* $\varphi \in \mathcal{L}(E,F;\mathbb{R})$*.*
On pose P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}_E$ *vers* $\mathcal{B}'_E$ *et* Q *la matrice de passage de* $\mathcal{B}_F$ *vers* $\mathcal{B}'_F$*. Si* $M=\mathrm{mat}(\varphi,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)$ *et* $N=\mathrm{mat}(\varphi,\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F)$ *alors* $N={}^tPMQ$*.*

Proposition 5.4 *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur* E *noté* $\mathcal{BS}(E)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(E,E;\mathbb{R})$*.*

Définition 5.2 *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. On appelle forme quadratique sur* E *toute application* $q : E \to \mathbb{R}$ *telle que* $\exists \varphi \in \mathcal{BS}(E), \forall x \in E, q(x) = \varphi(x,x)$*. Dans ce cas,* q *s'appelle la forme quadratique associé à la forme bilinéaire symétrique* φ*.*
L'ensemble des formes quadratiques sur E *est noté* $\mathcal{Q}(E)$*.*

Proposition 5.5 ***(Règles de calcul)*** *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel,* $\varphi \in \mathcal{BS}(E)$ *et* q *sa forme quadratique associée.*
– $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$*. En particulier,* $q(0)=0$ *et* $\forall x \in E, q(-x)=q(x)$*.*
– $\forall x,y \in E, q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y)$*.*
– $\forall x,y \in E, \varphi(x+y,x-y) = q(x) - q(y)$*.*
– ***Identité du parallèlogramme :*** $\forall x,y \in E, q(x+y)+q(x-y) = 2(q(x)+q(y))$*.*
– ***Formule de polarisation*** $\forall x,y \in E, \varphi(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y)-q(x-y)) = \frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))$*.*

Définition 5.3 *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie non nulle,* $\mathcal{B}$ *une base sur* E *et* $q \in \mathcal{Q}(E)$*. On appelle matrice de* q *dans la base* $\mathcal{B}$ *la matrice de sa forme polaire dans la base* $\mathcal{B}$*. On la note* $\mathrm{mat}(q,\mathcal{B})$*.*

Caractérisation 5.2 *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \ge 1$*,* $\mathcal{B}$ *une base de* E*,* $q \in \mathcal{Q}(E)$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*.*

$$A = \mathrm{mat}(q,\mathcal{B}) \iff A \text{ est symétrique et } \forall x \in E, q(x) = {}^tXAX \text{ avec } X=[x]_{\mathcal{B}}$$

Proposition 5.6 ***(Formule de changement de bases)*** *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* ≥ 1*,* $\mathcal{B}$*,* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E *et* $q \in \mathcal{Q}(E)$*. Si* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$*,* $A=\mathrm{mat}(q,\mathcal{B})$ *et* $A'=\mathrm{mat}(q,\mathcal{B}')$ *alors* $A'={}^tPAP$*.*

Définition 5.4 *Deux matrices* $A,B \in \mathcal{S}(n)$ *sont dites congruentes si* $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ *tel que* $B={}^tPAP$*.*

Corollaire et définition 5.7 *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* ≥ 1*,* $q \in \mathcal{Q}(E)$ *(resp.* $\varphi \in \mathcal{BS}(E)$*),* $\mathcal{B}$ *une base de* E*.*
Si $M=\mathrm{mat}(q,\mathcal{B})$ *(resp.* $M=\mathrm{mat}(\varphi,\mathcal{B})$*) alors* $\mathrm{rg}\, M$ *est indépendant du choix de la base* $\mathcal{B}$*. On l'appelle rang de* q *(resp.* φ*). On le note* $\mathrm{rg}\, q$ *(resp.* $\mathrm{rg}\, \varphi$*).*

Définition 5.5 *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $\varphi \in \mathcal{BS}(E)$ *de forme quadratique associée* q*.*
On appelle noyau de q *ou* φ *le noyau de l'application linéaire* $\begin{array}{cccc} \tilde{\varphi} : & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & \varphi_x \end{array}$ *où* $\forall x \in E$*,* $\begin{array}{cccc} \varphi_x : & E & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array}$*.*
On le note $\ker q$ *ou* $\ker \varphi$*.*
Si $\ker q = \{0\}$ *alors on dit que* q *ou* φ *est non dégénérée, sinon, on dit que* q *ou* φ *est dégénérée.*

Proposition 5.8 *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $q \in \mathcal{Q}(E)$ *et* $\mathcal{B}$ *une base de* E*. Alors :*

$$q \text{ non dégénéré} \iff \mathrm{mat}(q,\mathcal{B}) \in GL_n(\mathbb{R}) \iff \mathrm{rg}\, q = n$$

Définition 5.6 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $q \in \mathcal{Q}(E)$ de forme polaire φ. On dit que q ou φ est :*
- *positive si $\forall x \in E, q(x) \geq 0$.*
- *négative si $\forall x \in E, q(x) \leq 0$.*
- *définie si $\forall x \in E, q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*

Proposition 5.9 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et q une forme quadratique positive sur E de forme polaire φ.*
- ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)** : $\forall x, y \in E, |\varphi(x,y)| \leq \sqrt{q(x)q(y)}$.*
- $\ker q = \{x \in E, q(x) = 0\}$. *Autrement dit, pour tout $x \in E$ on a $q(x) = 0 \iff \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0$.*
- *q est non dégénéré $\iff$ q est définie $\iff$ φ est un produit scalaire $\iff$ $\sqrt{q}$ est une norme euclidienne.*

Définition 5.7 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $q \in \mathcal{Q}(E)$ de forme polaire φ.*
- *Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont φ-orthogonaux ou q-orthogonaux si $\varphi(x,y) = 0$.*
- *Soient $A, B \subset E$. On dit que A et B sont φ-orthogonaux ou q-orthogonaux si $\forall a \in A, \forall b \in B, \varphi(a,b) = 0$.*
- *Une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E est dite φ-orthogonale ou q-orthogonale si $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$ avec $i \neq j$ on a $\varphi(x_i, x_j) = 0$.*
- *Une famille de vecteurs de E est dite base φ-orthogonale ou q-orthogonale si elle est à la fois base de E et q-orthogonale.*

Proposition 5.10 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $q \in \mathcal{Q}(E)$.*
- *Alors E admet une base q-orthogonale.*
- *Si E est euclidien alors E admet une BON qui est q-orthogonale.*

Proposition 5.11 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $q \in \mathcal{Q}(E)$. On pose $\operatorname{rg} q = r$.*
- *Il existe r formes linéaires linéairement indépendantes $l_1, \dots, l_r$ et des réels non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que $\forall x \in E, q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \dots + \alpha_r l_r^2(x)$.*
- *Si $l_1, \dots, l_p$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des réels non nuls tels que $\forall x \in E, q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \dots + \alpha_p l_p^2(x)$ alors $p = \operatorname{rg} q$.*

Théorème 5.1 ***(Loi d'inertie de Sylvester)** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $q \in \mathcal{Q}(E)$.*
Il existe un couple $(s,t) \in \mathbb{N}^2$ et une base q-orthogonale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, q(x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$.
Le couple (s,t) ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$. On l'appelle la signature de q.

Corollaire 5.12 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $q \in \mathcal{Q}(E)$ de signature $(s, r-s)$.*
Il existe r formes linéaires linéairement indépendantes $l_1, \dots, l_r$ telles que $\forall x \in E, q(x) = l_1^2(x) + \dots + l_s^2(x) - l_{s+1}^2(x) - \dots - l_r^2(x)$.

Corollaire 5.13 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $q \in \mathcal{Q}(E)$ de signature (s,t).*
Soient $l_1, \dots, l_r$ des formes linéaires linéairement indépedantes et $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ non nuls tels que $\forall x \in E, q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \dots + \alpha_r l_r^2(x)$. Alors $s = \operatorname{card}\{\alpha_i / \alpha_i > 0\}$ et $t = \operatorname{card}\{\alpha_i / \alpha_i < 0\}$.

Classification des coniques de $\mathbb{R}^2$:

Nom :	Ellipse	Hyperbole	Parabole
Equation réduite :	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x^2 = py$

Proposition 5.14 *Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f\}$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.*
- *Si $\Delta > 0$ alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole ou réunion de deux droites non parallèles. On dit que $\mathcal{C}$ est de type hyperbole.*
- *Si $\Delta < 0$ alors $\mathcal{C}$ est une ellipse ou un point ou l'ensemble vide. On dit que $\mathcal{C}$ est de type ellipse.*
- *Si $\Delta = 0$ alors $\mathcal{C}$ est une parabole ou deux droites parallèles ou une droite ou l'ensemble vide. On dit que $\mathcal{C}$ est de type parabole.*

Classification des quadriques de $\mathbb{R}^3$:

Nom :	Ellipsoïde	cône	Hyperboloïde à une nappe
Equation réduite :	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Nom :	Hyperboloïde à deux nappes	Paraboloïde elliptique	Cylindre elliptique
Equation réduite :	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Nom :	Paraboloïde hyperbolique	cylindre hyperbolique	cylindre parabolique
Equation réduite :	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} = y$