Section : 4ème science

Modèle de Devoir

Durée :

QCM :

Une ou plusieurs réponses sont correctes. Préciser les.

1) Si A et B deux points de l'espace orienté et M un point tel que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{O}$ alors :

   a) M$\in (AB)$ b) $M \in cercle\ de\ diamètre\ [AB]$ c)$M \in med\ [AB]$

2) Dans l'espace orienté on considère un cube ABCDEFGH d'arête 1. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$ est le vecteur :

   a) $\overrightarrow{AD}$ b)$\overrightarrow{DA}$ c) $\overrightarrow{DB}$

3) $(\vec{U} \wedge \vec{V}).\vec{U}$ est égal à :

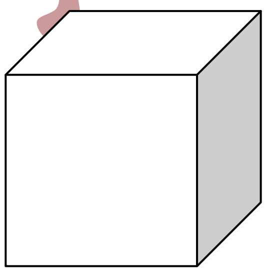
   a) 0 b) $\|\vec{U}\|^2.\|\vec{V}\|$ c) V.U

4) L'ensemble des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \wedge \overrightarrow{FM} = \vec{0}$ est

   a) Le plan(FEG) b) La droite (FB) c) Le singleton {F}.

5) Le vecteur $\overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BA}$ est égal à :

   a) $\overrightarrow{BC}$ b) $-\overrightarrow{BC}$ c) $-2\overrightarrow{BC}$



Exercice n°1 :

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On donne les points $D(0,1,0)$; $I\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$; $J(\frac{1}{2}, 1, 1)$ et E(0,0,1).

1) a) Déterminer $\overrightarrow{DI} \wedge \overrightarrow{DJ}$, puis déduire qu'une équation cartésienne du plan (DIJ) est : $2x + y - z - 1 = 0$.
   b) Calculer l'aire A du triangle DIJ.
2) Soit Δ La droite passant par E et perpendiculaire au plan (DIJ).
   a) Donner une représentation paramétrique de Δ.
   b) Montrer que le point d'intersection L de la droite Δet du plan (DIJ) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
   c) Calculer le volume du tétraèdre EDIJ.
3) On considère l'ensemble S des points M(x ;y ;z) vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \frac{4}{3} = 0$$

   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.
   b) Prouver que le plan (DIJ) est tangent à la sphère S en L.

Exercice n°2 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$des nombres complexes, l'équation :

$$(E): z^2 + \left(1-\sqrt{3}+2i\right)z - \left(\sqrt{3}+1\right) + \left(1-\sqrt{3}\right)i = 0$$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$l'équation (E). On posera z_1 dont la partie réelle est négative et z_2 l'autre racine.
3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $((O;\vec{u};\vec{v})$. Soit A, B , et C les points d'affixes respectives $z_A = -1-i,\ z_B = \sqrt{3}-i$ et $z_C = 1+\sqrt{3}$.
   a) Placer , dans le plan complexe, les points A, B et C.
   b) Montrer que le quadrilatère OABC est un parallélogramme.
   c) Déterminer l'affixe du point Ω le centre de OABC .
   d) Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right)$

Exercice n°3:

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$par :$g(x) = x^2 - 2\log(x)$.

1) Etudier les variations de g.
2) En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.

Parie II :

1) Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\log(x)}{x}$. On désigne par (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 2cm) .
   a) calculer la limite de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
   b) Montrer que la droite D : y=$\frac{x}{2}$ est une asymptote à (C_f)au voisinage de +∞.
   c) Etudier la position de (C_f) par rapport à la droite D.
2) a) Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
3) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0;+\infty[$sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que l'équation f(x)=0 a une solution unique x_0 dans $]0;+\infty[$, vérifier que 0,34<$x_0 < 0{,}35$.
4) Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C_f) où la tangente T à (C_f) est la parallèle à la droite (D). Préciser les coordonnées de B.
5) a) Construire la droite (D) , (T) et la courbe (C_f).
   b) Soit α un réel tel que :$\alpha > e^{-1}$. Calculer l'aire A_α de la région du plan limité par la courbe (C_f), la droite D et les droites d'équations : x=e^{-1} $et\ x = \alpha$.
   c) Calculer $\lim_{\alpha\to+\infty}(A_\alpha)$.