L – S – Amor Elkalchéni Béja	**15 / 04 / 2014**	**Classe : 4sc3**
Prof : Slah Khal²ouli	**Devoir de contrôle n°3**	**Durée : 2 h**

Exercice 1 : (06)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\right)$.

On donne les points A (1 , 0 , 1) , B (3 , 1 , -1) et C (0 , 1 , 5) .

1) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$2x - 2y + z - 3 = 0$.

2) Soit S l'ensemble des points M (x , y , z) de l'espace tels que :

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

a) Montrer que S est la sphère de centre I (-1 , 2 , 0) et de rayon R = 3.

b) Vérifier que le point A ∈ S .

c) Déterminer l'intersection du plan (ABC) et la sphère S .

d) Déterminer l'intersection de la droite (IA) et la sphère S .

3) On donne le plan Q : $x + 3y + 4z - 5 = 0$.

a) Montrer que le plan (ABC) est perpendiculaire au plan Q .

b) Déterminer l'intersection du plan Q et la sphère S .

c) Déterminer l'intersection de la droite (IA) et le plan Q .

Exercice 2 : (04)

On considère la suite (a_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + n\,a_n} , \ pour\ n \in IN . \end{cases}$$

1) Montrer que : $a_n > 0$, pour $n \in IN$.

2) Montrer que la suite (a_n) est décroissante .

3) En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite .

4) a) Vérifier que : $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = n$. b) En déduire a_n en fonction de n .

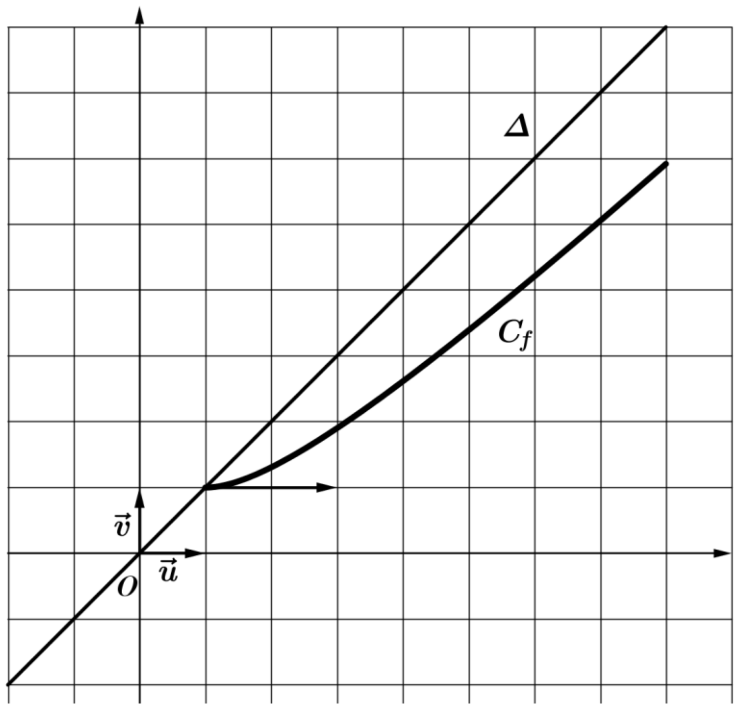
5) Retrouver la limite de la suite (a_n) .

Exercice 3 : (06)

C_f est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[1, +\infty[$

par $f(x) = ax + b \ln x$. (a et b sont deux réels)

C_f admet une branche parabolique de direction la droite Δ .



A) Par une lecture graphique , déterminer :

1) $f(1)$, $f'(1)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. 2) le tableau de variation de f .

3) Montrer que a = 1 et b = - 1 .

B) Soit u la suite définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - ln(u_n)\ , pour\ n \in IN. \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $u_n \geq 1$, $pour\ n \in IN$.

b) Montrer que la suite u est décroissante .

c) En déduire que u est convergente et déterminer sa limite .

2) On considère la suite v définie sur IN par :

$$\begin{cases} v_0 = e^3 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{u_n}\ , \text{pour } n \in \text{IN} \end{cases} .$$

a) Montrer que la suite v est décroissante .

b) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire sa limite .

Exercice 4 : **(04)**

Soit g la fonction définie sur l'intervalle] -1 , +∞ [par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}\ , si\ x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases} .$$

On pose $h(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt$, pour $x \in]-1, +\infty[$.

1) a) Montrer que si $x \in [0, +\infty[$, alors $0 \leq h(x) \leq \frac{x^3}{3}$.

b) Montrer que si $x \in]-1, 0]$, alors $\frac{x^3}{3(1+x)} \leq h(x) \leq 0$.

c) Vérifier que : $h(x) = \frac{x^2}{2} - x + ln(1+x)$, $pour\ x \succ -1$.

2) Montrer que g est dérivable en 0 et déterminer g '(0) .