Exercice n°1 :

Le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 3cm.

1) Soit (H) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifiant l'équation : $3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$.
   Montrer que (H) est une hyperbole dont-on déterminera le centre, les sommets, les foyers, les directrices et les asymptotes.
2) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $(1 + z + z^2 + z^3)$ soit réel.
3) Représenter l'ensemble E.

Exercice n°2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M ' d'affixe z' telle que $z' = (\bar{z} - 2)(\bar{z} + 1)$

On désigne par (x ; y) les coordonnées de M et par (x ' ; y ') celles de M ' .

1) Calculer x ' et y ' en fonction de x et y et montrer que lorsque M ' varie sur l'axe des ordonnées, M varie sur la courbe (C) d'équation: $x^2 - y^2 - x - 2 = 0$.

2) a- Prouver que (C) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et les foyers.

b- Tracer (C).

Exercice n°3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit $(\Gamma) = \left\{M(z) \text{ tel que } \left|z - 9 + i(\bar{z} - 9)\right| = 2\sqrt{2}\left|z - 4 - i\right|\right\}$ $z = x + iy$

1) Soient A,B et C les points d'affixes $z_A = 1 + 2i$, $z_B = -3i$ et $z_C = 2 - 3i$.
   a) Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en C. Déterminer l'application complexe associé à la similitude S et préciser ses éléments caractéristiques.
   b) A tout point M d'affixe z = x + iy , S(M)=M' d'affixe z'=x'+iy'.
      i) Exprimer z' en fonction de z. Quel est la similitude réciproque S' de S ?
      ii) En déduire l'expression de x et y en fonction de x' et y'.
2) a) Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) est : $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 14x + 10y - 13 = 0$.
   b) Montrer que l'image de (Γ) par S est la courbe (Γ') d'équation : $2x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.
   c) En déduire que (Γ') est une ellipse dont on précisera son centre, son excentricité, ses sommets et ses foyers puis le tracer.
3) En déduire la nature de (Γ) et la construire.

Exercice n°4 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère l'ellipse(E) d'équation : $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(\cos\theta, 2\sin\theta)$, où θ est un réel de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1) a) Déterminer, par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de (E).
2) b) Tracer (E) et placer ses foyers.
3) c) Vérifier que le point M appartient à (E).
4) Soit (T) la tangente à (E) en M. Montrer qu'une équation de (T) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est $2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0$.
5) On désigne par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et on désigne par $\mathscr{A}$ l'aire du triangle OPQ.
   a) Montrer que $\mathscr{A} = \dfrac{2}{\sin(2\theta)}$.
   b) En déduire que l'aire A est minimale si et seulement si M est le milieu du segment [PQ].

Exercice n°5 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f tel que :

f: P → P qui à M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = 2z - z^2$ et soient les points $M_1(z^2)$ et $M_2(2z)$.

1) Montrer que le quadrilatère O M_1 M_2M' est un parallélogramme.
2) Déterminer l'ensemble des points M(z) de P tel que z' soit réel.
3) Soit (H) l'ensemble des points M(z) de P tel que z' soit imaginaire.
   a) Montrer qu'une équation cartésienne de (H) est : $x^2 - 2x - y^2 = 0$.
   b) Montrer que (H) est une hyperbole et tracer (H).
   c) Soit le point I de (H) d'abscisse 3 et d'ordonnée strictement positive. Ecrire une équation de la tangente à (H) au point I.
4) Soit (P) l'ensemble des points M(z) tel que $Ré(z') + [Ré(z)]^2 = 2$.
   a) Montrer qu'une équation de (P) est : $y^2 + 2x - 2 = 0$.

Caractériser (P) et la tracer. Préciser son excentricité et sa directrice

Exercice n°6 :

Soit OAB un triangle rectangle et isocèle en O tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et OA=OB=2. On pose I=O*A ,J=O*B et K=A*B et soit S la similitude directe tel que S(A)=K et S(K)=J.

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Montrer que O est le centre de S.
   c) Déterminer la transformation complexe associés à S dans un repère R $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.
2) Soit P la courbe d'équation $x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y = 0$ selon le repère R et P'=S(P).
   a) Déterminer l'expression analytique de S dans R.
   b) Déterminer alors une équation cartésienne de (P') dans R et montrer que (P') est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.