Cálculo Avançado

1^a Lista de Exercícios

Prof.: Ivan Pontual Costa e Silva

1) Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que (X, τ) é *conexo* se os únicos subconjuntos de X que são simultaneamente abertos e fechados são X e $\emptyset$. Seja $Y \subseteq X$. Uma *cisão* de Y é um par (A, B) de subconjuntos $A, B \subseteq X$ tais que $Y = A \cup B$, $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Uma cisão (A, B) é dita *trivial* se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

a) Mostre que o par (A, B) é uma cisão de Y se, e somente se, $Y = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ e A e B são abertos e fechados de Y munido da topologia induzida $\tau|_Y$.

b) Mostre que $(Y, \tau|_Y)$ é um espaço topológico conexo se, e somente se, toda cisão de Y é trivial.

2) Seja (X, τ) um espaço topológico, e seja $Y \subseteq X$. Um ponto $y \in Y$ é dito ser *interior* se existir $U \ni y$ aberto tal que $U \subseteq Y$. O *interior* $int(Y)$ de Y é o conjunto de seus pontos interiores.

a) Prove que $int(Y)$ é sempre aberto.

b) Prove que Y é aberto se, e somente se, $Y = int(Y)$.

c) Prove que se $U \subseteq Y$ e U é aberto, então $U \subseteq int(Y)$. Conclua que $int(Y)$ é a união de todos os abertos contidos em Y.

d) Y e $\overline{Y}$ têm sempre o mesmo interior?

e) Y e $int(Y)$ têm sempre o mesmo fecho?

3) Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Prove que a função $d : (M \times N) \times (M \times N) \to \mathbb{R}$ dada por

$$d((x, y), (x', y')) = d_M(x, x') + d_N(y, y')$$

é uma métrica em $M \times N$. Prove que a topologia que essa métrica define em $M \times N$ é exatamente a topologia-produto (das topologias métricas em M e N).

4) Sejam (X, τ) e (Y, η) espaços topológicos, e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é *aberta* se para todo $U \in \tau$, a imagem direta $f(U) \in \eta$. Prove que as *projeções canônicas* $\pi_1 : (x, y) \in X \times Y \mapsto x \in X$ e $\pi_2 : (x, y) \in X \times Y \mapsto y \in Y$ são aplicações contínuas e abertas, se adotamos em $X \times Y$ a topologia produto.

5) Sejam (X, τ) e (Y, η) espaços topológicos, e $f : X \to Y$ uma função. f é um *homeomorfismo* se é uma bijeção contínua e com inversa contínua. Se um tal homeomorfismo existe, (X, τ) e (Y, η) são ditos *homeomorfos*.

a) Prove que f é homeomorfismo se e somente se é uma bijeção contínua e aberta (cf. Exercício 4).

b) Prove que se f é um homeomorfismo, então uma sequência $(x_n) \subseteq X$ converge em (X, τ) se e somente se a sequência $(f(x_n)) \subseteq Y$ converge em (Y, η).

c) Prove que, se f é uma bijeção, f é homeomorfismo se, e somente se, $f^* : U \in \tau \mapsto f(U) \in \mathbb{P}(Y)$ é injetora e sua imagem é precisamente η.

d) Prove que se $X = Y$, $f = Id_X : x \in X \mapsto x \in X$ é contínua se e somente se $\eta \subseteq \tau$, e um homeomorfismo se e somente $\eta = \tau$.

e) Prove que $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ é um homeomorfismo, onde a topologia em $(-1, 1)$ é a topologia obtida da restrição da métrica usual de $\mathbb{R}$.

6) Seja $K \subset \mathbb{R}$ o conjunto formado por 0 e pelos números $1/n$, com $n = 1, 2, \ldots$. Prove que K é compacto *diretamente da definição*, isto é, sem usar a propriedade de Heine-Borel. Em seguida, prove que existe uma cobertura aberta de $(0, 1)$ que não admite subcobertura finita.

7) Sejam (X, τ) e (Y, η) espaços topológicos, e $K \subseteq X$, $L \subseteq Y$ compactos. Prove que $K \times L$ é compacto na topologia produto.

8) Seja (M, d) um espaço métrico, e seja $A \subseteq M$. Prove que a topologia métrica definida em A pela restrição $d|_{A \times A}$ é precisamente a topologia induzida $\tau_d|_A$. Use isto e o Exercício 5.e para provar que um espaço métrico completo (isto é, no qual toda sequência de Cauchy converge) pode perfeitamente ser homeomorfo a um espaço métrico que não é completo.