CHAPITRE 3

Fonction carré. Problèmes du 2nd degré

ACTIVITÉS

(page 67)

Activité 1

2 Estimations à 0,01 m près :
- hauteur maximale atteinte $h \approx 4{,}10\ m$;
- longueur du lancer $\ell \approx 14{,}18$ m.

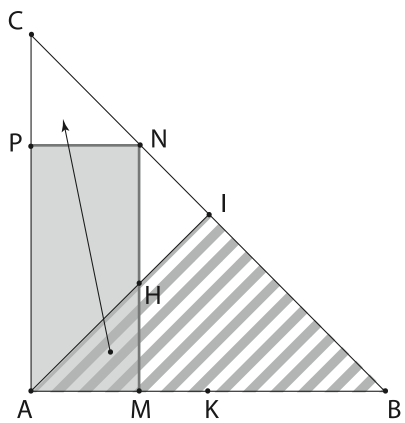
Activité 2

2 Conjectures : l'aire du triangle ABI semble supérieure ou égale à celle du rectangle AMNP.
L'égalité des aires semble obtenue lorsque M est au milieu de [AB] ($x = 2$).

3 Stratégies de preuve

• **Géométrie : comparaison d'aires**

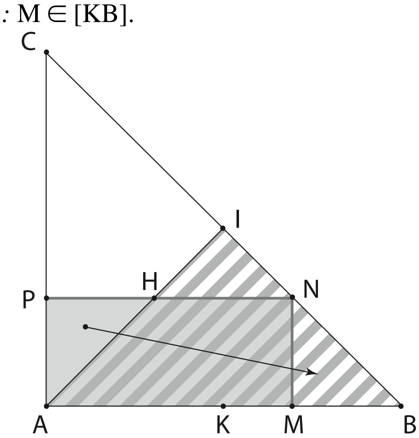
Figure 1 : M ∈ [AK] où K est le milieu de [AB].



Le rectangle AMNP a même aire que le trapèze AHNC et le triangle AIC même aire que le triangle ABI.

Le trapèze AHNC est contenu dans le triangle AIC, donc aire(AHNC) ⩽ aire (AIC).
D'où aire(AMNP) ⩽ aire(AIB).

Figure 2 : M ∈ [KB].



Par un raisonnement analogue :

aire (AHNB) ⩽ aire(ABI)

donc aire (AMNP) ⩽ aire(ABI).
Dans tous les cas, aire (AMNP) ⩽ aire(ABI) et l'égalité a lieu lorsque M est en K milieu de [AB].

• **Analyse : utilisation d'une fonction**

On pose AM = x avec $0 \leqslant x \leqslant 4$, d'où MN = MB = $4 - x$.
aire(AMNP) = $x(4 - x)$ et aire(ABI) = 4 cm^2.
Posons $f(x) = x(4 - x)$ pour $x \in [0\,;4]$.
Sur la calculatrice, on conjecture pour f un maximum de 4 obtenu pour $x = 2$.
$4 - f(x) = 4 - x(4 - x) = 4 - 4x + x^2 = (2 - x)^2$.
Ainsi, pour tout x, $4 - f(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \leqslant 4$ et la valeur 4 est obtenue lorsque $x = 2$.
On conclut : aire(AMNP) ⩽ aire(ABI).
L'égalité a lieu lorsque $x = 2$, c'est-à-dire lorsque M est au milieu de [AB].

PROBLÈME OUVERT

Les dimensions des côtés de l'angle droit de chacune des équerres sont notées x et $10 - x$ ($0 \leqslant x \leqslant 10$).

Piste 1 : aire ⑤ = aire (grand carré) – 4 aire(équerre)

aire ⑤ $= 100 - 2x(10 - x)$

aire ⑤ $= 2x^2 - 20x + 100$.

• Penser à tabuler pour conjecturer numériquement la valeur de x qui minimise l'aire ⑤.

• Penser à examiner la courbe de la fonction représentant l'aire ⑤ pour conjecturer son minimum.

• Prouver que les conjectures sont valides ou non.

Piste 2 : le côté c du carré ⑤ est d'après le théorème de Pythagore tel que $c^2 = x^2 + (10 - x)^2$.

D'où aire ⑤ $= x^2 + (10 - x)^2$.

• Mêmes remarques que pour la piste 1.

Piste 3 : on note d la diagonale du carré ⑤.

aire ⑤ $= \dfrac{d^2}{2}$

avec $10 \leqslant d \leqslant 10\sqrt{2}$.

• Remarquer que l'aire minimale est obtenue lorsque $d = 10$ (d est alors la distance entre deux côtés opposés du carré). D'où la disposition correspondante et les dimensions des équerres.

EXERCICES

Application (page 70)

1 **a)** $A = 25x^2 - 20x + 4$; **b)** $B = 9x^2 - \dfrac{25}{4}$.

2 **a)** $A = 3 - 2\sqrt{2}$; **b)** $B = -1$; **c)** $C = 21 + 12\sqrt{3}$.

3 *Corrigé dans le manuel.*

4 $UV = (\sqrt{8} - \sqrt{7})(2\sqrt{2} - \sqrt{7}) = (\sqrt{8} - \sqrt{7})(\sqrt{8} + \sqrt{7})$
$= 1$.

5 **a)** $A = 4x^2 + 6x - 7$; **b)** $B = 9x^2 - 16x - 4$.

6 **a)** $C = -5x^2 + 36x - 7$; **b)** $B = 17x^2 - 18x + 26$;
c) $E = 10x^2 - 23x + 11$.

7 Le coefficient de x est 2.

8 **a)** $(6x - 5)(6x + 5)$; **b)** $(x - 9)^2$; **c)** $(2x + 5)^2$.

9 **a)** $49t^2 - 14t + 1 = (7t - 1)^2$.
b) $36t^2 - 121 = (6t - 11)(6t + 11)$.
c) $16 + 24t + 9t^2 = (4 + 3t)^2$.

10 **a)** $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.
b) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 = (x + \sqrt{2})^2$.
c) $4x^2 - 4x\sqrt{3} + 3 = (2x - \sqrt{3})^2$.

11 **a)** $A = (x + 1)(x - 1)$; **b)** $B = (2x + 3)(3x + 1)$;
c) $C = (3x - 5)(2x - 9)$.

12 **a)** $E = t(3t + 2)$.
b) $F = (3t - 12)(3t - 2) = 3(t - 4)(3t - 2)$.
c) $G = (t + 1)(5t + 7)$.

13 **a)** $E = (x + 1)^2 - 4(x + 1)$
$E = (x + 1)(x - 3)$.
b) $F = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(x - 3)$
$F = (2x - 1)(3x - 4)$.
c) $G = (3x - 5)(3x + 5) - (3x - 5)(2x - 3)$
$G = (3x - 5)(x + 8)$.

14 $E = t(t - 2)$; $F = (t - 1)(5 - t)$; $G = (2t + 1)(2t - 3)$.

15 $A = 3(x + 2)^2 - 8$; $B = 5 - 2(x - 1)^2$; $C = 4 - (x - 2)^2$.

16 **1.** Aire du domaine colorié : $A = 2x(4 - x)$.
2. Aire du domaine formé des deux carrés :
$B = x^2 + (4 - x)^2$.
3. L'aire du domaine constitué des deux carrés est aussi la différence entre l'aire du grand carré et celle du domaine colorié.
D'où $16 - A = B$ donc $16 - 2x(4 - x) = x^2 + (4 - x)^2$.
Note : on peut aussi vérifier cette égalité en développant chacun des membres.

17 **1.** $x^2 > 18$; **2.** $x^2 > 100$.

18 **1.** $x^2 \geqslant 4/9$; **2.** $x^2 > 0{,}01$.

19 **1.** $t^2 < 10^{-6}$; **2.** $t^2 < 0{,}000\,1$.

20 $0 < \sqrt{3} - 1 < \sqrt{5} - 1$ donc $a < b$.

21 $1 - 10^8 < 1 - 10^6 < 0$ donc $b > a$.

22 *Corrigé dans le manuel.*

23

x	$-\infty$	-7	0	$5\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$\searrow$	49	0	50	$\nearrow$

1. $x^2 \geqslant 49$; **2.** $x^2 \geqslant 50$; **3.** $0 \leqslant x^2 \leqslant 50$.

24 **1.** $0 \leqslant x^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$; **2.** $0 \leqslant x^2 \leqslant 12$; **3.** $0 \leqslant x^2 \leqslant 0{,}000\,1$.

25 **1.** Contre-exemple : x = −2 ; −2 < 1 mais $(-2)^2 > 1$.

2. Contre-exemple : $x = 5$; $5 > -\sqrt{10}$ mais $5^2 \geqslant 10$.

26 **1.** Faux. Contre-exemple $x = -10$.

2. Vrai. **3.** Vrai.

27 **1.** $y_A = (-3)^2 = 9$; $y_B = 1^2 = 1$.

2. a) $0 < x^2 < 9$; **b)** $0 < x^2 < 1$; **c)** $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

28 **1.** $y_A = (-\sqrt{3})^2 = 3$; $y_B = (\sqrt{5})^2 = 5$.

2. a) $x^2 \geqslant 3$; **b)** $x^2 \geqslant 5$; **c)** $0 \leqslant x^2 \leqslant 5$.

29 **a)** $S = [-\sqrt{5} ; \sqrt{5}]$;

b) $S =]-\infty ; -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5} ; +\infty[$;

c) $S = [-\sqrt{5} ; 0]$.

30 **a)** $S = [-3 ; -2] \cup [2 ; 3]$; **b)** $S =]-2\sqrt{2} ; 0[\cup]0 ; 2\sqrt{2}[$.

31 **1.** Faux. **2.** Vrai. **3.** Vrai. **4.** Vrai.

32 **1.** $S = \{2 - \sqrt{5} ; 2 + \sqrt{5}\}$.

2. $S =]-\infty ; 2 - \sqrt{5}[\cup]2 + \sqrt{5} ; +\infty[$.

33 **1.** $S = \{-2 - 2\sqrt{2} ; -2 + 2\sqrt{2}\}$.

2. $S =]-2 - 2\sqrt{2} ; -2 + 2\sqrt{2}[$.

34 *Corrigé dans le manuel.*

35 **1.** $S = \{-1 ; 2\}$.

2. Tableau de signe

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x - 2)(x + 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = [-1 ; 2]$.

3. La parabole d'équation $y = x^2 - x - 2$ coupe l'axe des abscisses aux points $A(-1 ; 0)$ et $B(2 ; 0)$.
La parabole est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-1 ; 2[$.

36 **1.** $S = \{2 ; 3\}$.

2. Tableau de signe

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
2		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x - 3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x - 2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2(x - 3)(x - 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; 2[\cup]3 ; +\infty[$.

3. La parabole d'équation $y = 2x^2 - 10x + 12$ coupe l'axe des abscisses aux points $A(2 ; 0)$ et $B(3 ; 0)$.
La parabole est au-dessus de l'axe des abscisses sur la réunion d'intervalles $]-\infty ; 2[\cup]3 ; +\infty[$.

37 **1.** $S = \{-5 ; 1\}$.

2. Tableau de signe

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
-3		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
$x + 5$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x - 1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$-3(x + 5)(x - 1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. La parabole d'équation $y = -3x^2 - 12x + 15$ coupe l'axe des abscisses aux points $A(-5 ; 0)$ et $B(1 ; 0)$.
Elle est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-5 ; 1[$ et au-dessous sur la réunion d'intervalles $]-\infty ; -5[\cup]1 ; +\infty[$.

38 **1.** $S = \left\{4 ; \frac{5}{2}\right\}$.

2. Tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$x - 4$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$-2x + 5$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$(x - 4)(-2x + 5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. La parabole d'équation $y = -2x^2 + 13x - 20$ coupe l'axe des abscisses aux points $A\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$ et $B(4 ; 0)$. Elle est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left]\frac{5}{2} ; 4\right[$ et au-dessous sur la réunion d'intervalles $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right[\cup]4 ; +\infty[$.

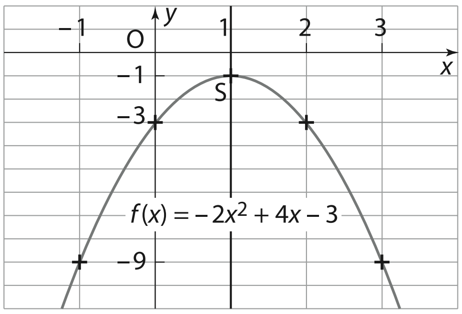
39 **1.** Tableau de variation

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\nearrow$	-1	$\searrow$

f admet un minimum égal à -1 obtenu pour $x = 1$.

2. L'axe de symétrie de la parabole est la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le sommet $S(1 ; -1)$.

Tracé de la parabole



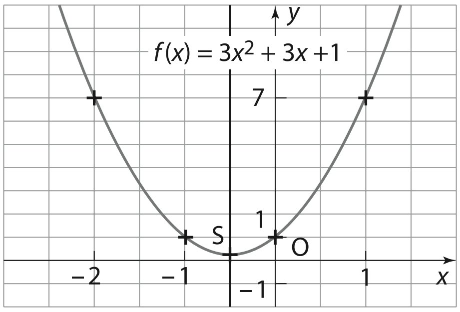
40 **1.** Tableau de variation

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$

f admet un minimum égal à $\frac{1}{4}$ obtenu pour $x = -\frac{1}{2}$.

2. L'axe de symétrie de la parabole est la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le sommet $S\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right)$.

Tracé de la parabole



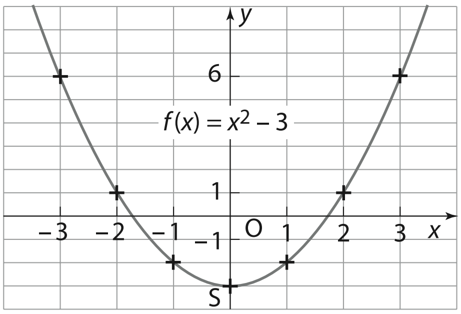
41 **1.** Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	-3	↗

f admet un minimum égal à -3 obtenu pour $x = 0$.

2. L'axe de symétrie de la parabole est l'axe des ordonnées.

Tracé de la parabole



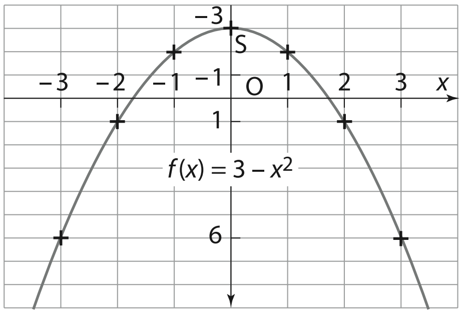
42 **1.** Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	3	↘

f admet un maximum égal à 3 obtenu pour $x = 0$.

2. L'axe de symétrie de la parabole est l'axe des ordonnées.

Tracé de la parabole



43 *Corrigé dans le manuel.*

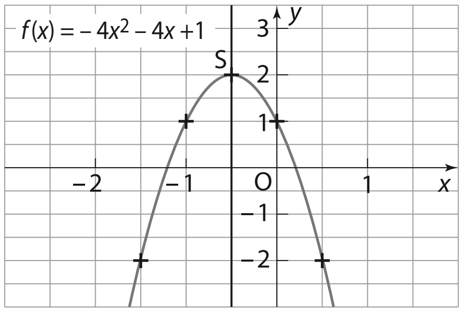
44 **1.** Tableau de variation

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	↗	2	↘

f admet un maximum égal à 2 obtenu pour $x = -\frac{1}{2}$.

2. L'axe de symétrie de la parabole est la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le sommet $S\left(-\frac{1}{2}\,;\,2\right)$.

Tracé de la parabole



EXERCICES Apprendre à chercher (page 79)

49 **1. a)** Graphiquement, l'équation $x = x^2$ a pour solutions 0 et 1.

b) La droite est au-dessus de la parabole lorsque $0 < x < 1$.
Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation $x > x^2$ est $S_1 =]0\,;\,1[$.

c) La droite est au-dessous de la parabole lorsque $x < 0$ ou $x > 1$.
Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation $x < x^2$ est $S_2 =]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,+\infty[$.

2. Tableau de comparaison

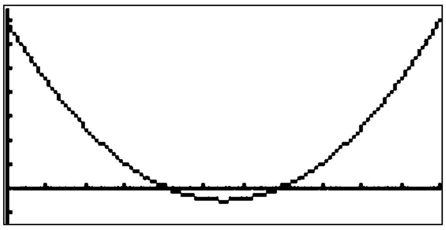
x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
Comparaison	$x < x^2$	$\boxed{x = x^2}$	$x > x^2$	$\boxed{x = x^2}$	$x < x^2$

50 **1. a)** La somme des aires des deux carrés est : $S(x) = AM^2 + MB^2$
avec $AM = x$
et $BM = 11 - x$.
D'où $S(x) = x^2 + (11 - x)^2$
$= x^2 + 121 - 22x + x^2$
soit $S(x) = 2x^2 - 22x + 121$.

b) Le problème est de déterminer x tel que $S(x) = 65$, d'où la mise en équation : $2x^2 - 22x + 121 = 65$.
Cette équation équivaut à $2x^2 - 22x + 56 = 0$ soit, après division par 2, à $x^2 - 11x + 28 = 0$.

2. a) Le nombre $x = AM$ varie entre 0 et 11, donc la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,11]$.

b) Vue d'écran



c) Graphiquement, on conjecture que les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = 4$ et $x = 7$.
Vérifions par le calcul si ces valeurs conviennent :
$f(4) = 4^2 - 11 \times 4 + 28 = 0$; $f(7) = 7^2 - 11 \times 7 + 28 = 0$.
Les nombres 4 et 7 de l'intervalle de définition [0 ; 11] sont solutions de l'équation $f(x) = 0$, donc ce sont les solutions du problème.

51 **1. a)** Le nombre x = AM varie entre 0 et 4, donc l'ensemble de définition de f est l'intervalle [0 ; 4].

b) Le rectangle AMPN a pour dimensions x et $4 - x$.
Ainsi $f(x) = x(4 - x) = -x^2 + 4x$.
Cette expression est du type $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 1$ et $c = 0$ donc f est un polynôme du 2nd degré .

2. a) Comme $a < 0$, f est représentée par une partie de parabole tournée vers le bas. L'extremum de f est obtenu pour $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$.
Tableau de variation

x	0	2	4
f	0 ↗	4	↘ 0

b) On conclut que l'aire du rectangle AMPN est maximale lorsque $x = 2$, c'est-à-dire lorsque M est au milieu du côté [AB]. Cette aire maximale vaut 4 cm².

EXERCICES Utiliser GeoGebra (page 80)

52 **1.** Réalisation de la figure avec GeoGebra.

2. Conjectures

a) $a < 0$ et $c = 4$.

b) $a = -0{,}2$. Ainsi $f(x) = -0{,}2x(x - 8) + 4$.

c) La condition de sécurité semble remplie. Le maximum de f ne dépasse pas 8.

Méthode expérimentale
Tracer la droite d'équation $y = 8$, puis examiner si la trajectoire parabolique est toujours au-dessous de cette droite.

3. Démonstration

a) A(0 ; 4) est sur la trajectoire donc $f(0) = 4$.
Ainsi $c = 4$.

b) B(10 ; 0) est sur la trajectoire donc $f(10) = 0$.
D'où $10a(10 - 8) + 4 = 0$ soit $20a + 4 = 0$ donc $a = -0{,}2$.

c) Ainsi, la trajectoire a pour équation :
$y = -0{,}2x(x - 8) + 4$
$y = -0{,}2x^2 + 1{,}6x + 4$.

d) Cette expression est du type $ax^2 + bx + c$ avec $a = -0{,}2$, $b = 1{,}6$ et $c = 4$.
Comme $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas. Le sommet S a pour abscisse $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{1{,}6}{2(-0{,}2)} = 4$.
Son ordonnée est $y_s = -0{,}2 \times 4^2 + 1{,}6 \times 4 + 4 = 7{,}2$.
Ainsi S(4 ; 7,2).
L'obus atteint la hauteur maximale de 720 m, donc la condition de sécurité est remplie.
Ces résultats sont en accord avec l'expérimentation.

EXERCICES Entraînement (page 81)

CALCUL LITTÉRAL

53 **a)** Vrai.

b) Faux. La réponse exacte est $2n^2$.

c) Faux. La réponse exacte est $(n - 1)^2$.

d) Faux. La réponse exacte est $(3n)^2$.

54 $A(x) = x^2 - 8x + 6$; $B(x) = 6x^2 - 9x - 11$; $C(x) = 6x^2 - 17x + 12$.

55 $A(t) = 7t^2 - 3t + 3$; $B(t) = 16t^2 - 2t - 9$; $C(t) = 19t^2 - 25t + 10$.

56 $A(x) = 13x^2 - 4x - 16$; $B(x) = 3x^2 - 20x - 7$; $C(x) = 10x^2 - 16x + 1$.

57 **a)** Faux (P = 8 cm).

b) Vrai ($\mathcal{A}' = 16 - x(4 - x) = 16 - 4x + x^2$ cm²).

c) Vrai (si $x = \frac{5}{2}$, alors $\mathcal{A}' = \frac{49}{4}$ cm²).

58 Les aires sont exprimées en cm².

1. a) Aire du carré rouge : $(4 - 2x)^2$.

b) Aire du domaine constitué des cinq carrés :
$\mathcal{A} = 4x^2 + (4 - 2x)^2$.

2. a) Aire d'un des rectangles : $x(4 - 2x)$.

b) Aire du domaine constitué des quatre rectangles :
$\mathcal{B} = 4x(4 - 2x)$.

3. L'aire du domaine colorié est aussi la différence entre l'aire du grand carré et celle du domaine constitué des quatre rectangles : $\mathcal{A} = 16 - \mathcal{B}$.
D'où pour tout x de $[0\,;2]$:
$$4x^2 + (4-2x)^2 = 16 - 4x(4-2x).$$
Note : on peut aussi vérifier cette égalité en développant chacun des membres.

59 **1.** Programme de calcul :
$$x \xrightarrow[\text{ajouter 3}]{} x+3 \xrightarrow[\text{élever au carré}]{} (x+3)^2 + \xrightarrow[\text{multiplier par }-1]{} -(x+3)^2$$
Ainsi, on obtient en sortie : $-(x+3)^2$.

2. L'expression $-x^2 - 9$ est définie par le programme :
$$x \xrightarrow[\text{élever au carré}]{} x^2 \xrightarrow[\text{multiplier par }-1]{} -x^2 \xrightarrow[\text{ajouter }-9]{} -x^2-9$$
L'expression $-x^2 + 3$ est définie par le programme :
$$x \xrightarrow[\text{élever au carré}]{} x^2 \xrightarrow[\text{multiplier par }-1]{} -x^2 \xrightarrow[\text{ajouter 3}]{} -x^2+3$$

60 **1.** Programme de calcul :
$$x \xrightarrow[\text{élever au carré}]{} x^2 \xrightarrow[\text{multiplier par }-1]{} -x^2 \xrightarrow[\text{ajouter 2}]{} -x^2+2$$
Ainsi, on obtient en sortie : $-x^2 + 2$.

2. L'expression $(-x+2)^2$ est définie par le programme :
$$x \xrightarrow[\text{multiplier par }-1]{} -x \xrightarrow[\text{ajouter 2}]{} -x+2 \xrightarrow[\text{élever au carré}]{} (-x+2)^2$$
L'expression $-(x^2+2)$ est définie par le programme :
$$x \xrightarrow[\text{élever au carré}]{} x^2 \xrightarrow[\text{ajouter 2}]{} x^2+2 \xrightarrow[\text{multiplier par }-1]{} -(x^2+2)$$

61 $A(x) = x(3x-8)$; $B(x) = 5x(5x-1)$;
$C(x) = 2x(1-x)$; $D(x) = 5x^2(x-2)$.

62 $A(x) = (x-5)^2$; $B(x) = (3x+1)^2$
$C(x) = (6x+5)^2$; $D(x) = (7x-4)(7x+4)$.

63 $A(t) = (t+1)(2t-3)$; $B(t) = (t-4)(3t-1)$;
$C(t) = (3t+5)(6t-1)$; $D(t) = (5t-1)(-2t-1)$.

64 $A(t) = 7t(-t+2)$; $B(t) = (7t+9)(-t-3)$;
$C(t) = (t+1)(4t-4) = 4(t-1)(t+1)$; $D(t) = 4t(2t+1)$.

65 $A(x) = (5x-1)(5x+1)$; $B(x) = (3x+2)(1-3x)$;
$C(x) = (2-x)(2x+4) = 2(x+2)(2-x)$; $D(x) = (x+2)(x-1)$.

66 On développe les expressions **a)** et **c)** :
$(x-3)(x+5) = x^2 + 5x - 3x - 15 = x^2 + 2x - 15$;
$(x+1)^2 - 16 = x^2 + 2x + 1 - 16 = x^2 + 2x - 15$.
Les trois formes correspondent bien à une même expression.
Note : on peut aussi factoriser l'expression **c)** écrite sous forme canonique et retrouver l'expression du **a)**.

67 *Corrigé dans le manuel.*

68 On développe les expressions **b)** et **c)** :
$(2x-1)(x+2) = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x^2 + 3x - 2$;
$$2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) - \frac{25}{8} = 2x^2 + 3x - 2.$$
Ainsi, les trois formes correspondent bien à une même expression.

69 **1.** Programme P_1 :
$$x \xrightarrow[\text{ajouter }-1]{} x-1 \xrightarrow[\text{élever au carré}]{} (x-1)^2 \xrightarrow[\text{ajouter }-9]{} (x-1)^2 - 9$$
Programme P_2 :
$$\left.\begin{array}{l} x \xrightarrow[\text{ajouter 4}]{} x+4 \\ x \xrightarrow[\text{ajouter 2}]{} x+2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{calculer le produit}]{} (x+4)(x+2)$$
2. Comparaison de P_1 et P_2
Entrée : $x = -2$; sortie P_1 : 0 ; sortie P_2 : 0.
Entrée : $x = 1$; sortie P_1 : -9 ; sortie P_2 : 15.

3. Par factorisation :
$(x-1)^2 - 9 = (x-1-3)(x-1+3) = (x-4)(x+2)$.
D'où la modification du programme P_2 :
$$\left.\begin{array}{l} x \xrightarrow[\text{ajouter }-4]{} x-4 \\ x \xrightarrow[\text{ajouter 2}]{} x+2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{calculer le produit}]{} (x-4)(x+2)$$

70 **1.** Programme P_1 :
$$x \xrightarrow[\text{ajouter }-2]{} x-2 \xrightarrow[\text{élever au carré}]{} (x-2)^2 \xrightarrow[\text{ajouter 5}]{} 5 + (x-2)^2$$
Programme P_2 :
$$\left.\begin{array}{l} x \xrightarrow[\text{multiplier par }-4]{} -4x \xrightarrow[\text{ajouter 1}]{} -4x+1 \\ x \xrightarrow[\text{élever au carré}]{} x^2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{calculer la somme}]{} x^2 - 4x + 1$$
2. Comparaison de P_1 et P_2
Entrée : $x = -2$; sortie P_1 : 21 ; sortie P_2 : 13.
Entrée : $x = 1$; sortie P_1 : 6 ; sortie P_2 : -2.

3. Par développement :
$5 + (x-2)^2 = 5 + x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 9$.
D'où la modification du programme P_2 :
$$\left.\begin{array}{l} x \xrightarrow[\text{multiplier par }-4]{} -4x \xrightarrow[\text{ajouter 9}]{} -4x+9 \\ x \xrightarrow[\text{élever au carré}]{} x^2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{calculer la somme}]{} x^2 - 4x + 9$$

COMPARAISON

71 **a)** $4 \leqslant x^2 \leqslant 25$; **b)** $\frac{1}{9} < x^2 \leqslant \frac{1}{4}$; **c)** $0 \leqslant x^2 \leqslant 5$.

72 **a)** $\frac{1}{4} \leqslant x^2 \leqslant 4$; **b)** $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$; **c)** $0 \leqslant x^2 < 3$.

73 **a)** $x^2 \in [0\,;+\infty[$; **b)** $x^2 \in [0\,;9[$; **c)** $x^2 \in [0\,;+\infty[$.

74 **a)** $S =]-\infty\,;-5[\cup]5\,;+\infty[$; **b)** $S = [-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}]$;
c) $S =]-\infty\,;-2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}\,;+\infty[$.

75 *Corrigé dans le manuel.*

76 **a)** $S = [-2\sqrt{3}\,;-3] \cup [3\,;2\sqrt{3}]$.
b) $S = [-2\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}\,;2\sqrt{2}]$.

77 **1.** $A^2 = 4 + 2\sqrt{3}$; $B^2 = 4 + 2\sqrt{3}$.
2. A et B sont positifs et $A^2 = B^2$ donc $A = B$.

78 $X^2 = 6 - 2\sqrt{5}$; $Y^2 = 6 - 2\sqrt{5}$.

Ainsi X < 0, Y > 0 et X et Y ont le même carré, donc X et Y sont opposés. Donc X = –Y.

79 **1.** Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de l'équation $x^2 = 2x$.
Cette équation équivaut à $x(x - 2) = 0$.
D'où $x = 0$ ou $x = 2$.

2. Tableau de comparaison :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Comparaison		$x^2 > 2x$	$\boxed{x^2 = 2x}$	$x^2 < 2x$	$\boxed{x^2 = 2x}$	$x^2 > 2x$	

80 Vue d'écran :

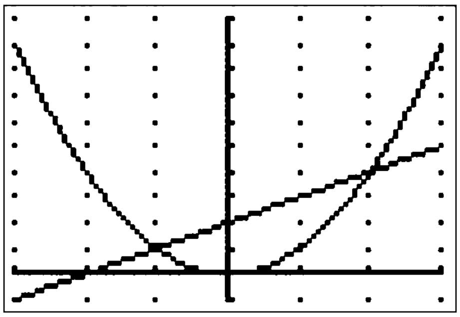


Tableau de comparaison :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Comparaison		$x^2 > x + 2$	$\boxed{x^2 = x + 2}$	$x^2 < x + 2$	$\boxed{x^2 = x + 2}$	$x^2 > x + 2$	

81 **1.** À partir de la vue d'écran, on conjecture que :
- si $0 \leqslant x \leqslant 4$, alors $\frac{1}{2}x^2 \leqslant 2x$;
- si $x > 4$, alors $\frac{1}{2}x^2 > 2x$.

2. a) La différence est $\Delta = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, soit :

$\Delta = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}4x = \frac{1}{2}x(x - 4)$.

b) Tableau du signe de la différence Δ sur $[0 ; +\infty[$:

x	0		4		$+\infty$
$\frac{1}{2}x$	0	+	|	+	
$x - 4$		–	0	+	
$\Delta = \frac{1}{2}x(x-4)$	0	–	0	+	

D'où le tableau de comparaison :

x	0		4		$+\infty$
Comparaison	$\boxed{\frac{1}{2}x^2 = 2x}$	$\frac{1}{2}x^2 < 2x$	$\boxed{\frac{1}{2}x^2 = 2x}$	$\frac{1}{2}x^2 > 2x$	

82 **1.** $x \geqslant 2 \Rightarrow x^2 \geqslant 4$: vrai.
Les nombres x et 2 sont tous deux positifs, donc leurs carrés sont rangés dans le même ordre.

2. a) $x < -1 \Rightarrow x^2 > 1$: vrai.
Les nombres x et –1 sont tous deux négatifs, donc leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire.

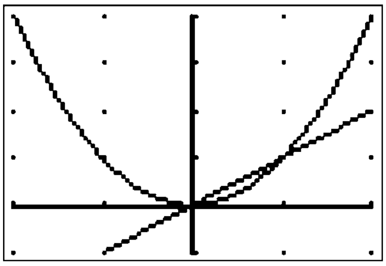
b) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$: faux.
Contre-exemple : $x = -2$ est tel que $x^2 = 4$.

c) $x < 0 \Rightarrow x^2 < 0$: faux.
x^2 est un nombre positif.

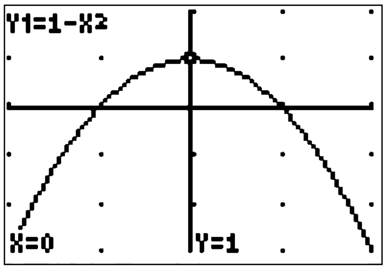
d) $x < \sqrt{3} \Rightarrow x^2 < 3$: faux.
Contre-exemple : $x = -2$; $-2 < \sqrt{3}$ et $(-2)^2 \geqslant 3$.

e) $x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$: vrai.
Si $x^2 = 2$, alors $x^2 - 2 = 0$ soit après factorisation
$(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$.
Par conséquent, $x + \sqrt{2} = 0$ ou $x - \sqrt{2} = 0$, donc $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$.

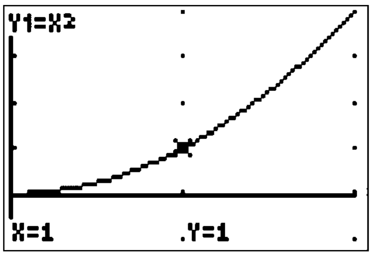
3. a) $0 < x < 1 \Rightarrow x > x^2$.
Illustration graphique :



b) $-1 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 1 - x^2 \geqslant 0$.
Illustration graphique :



c) $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$.
Illustration graphique :



COURBE ET VARIATION

83

Fonction	f_1	f_2	f_3	f_4
Courbe	$\mathscr{C}_3$	$\mathscr{C}_1$	$\mathscr{C}_2$	$\mathscr{C}_4$

84

Fonction	f_1	f_2	f_3	f_4
Courbe	$\mathscr{C}_3$	$\mathscr{C}_4$	$\mathscr{C}_2$	$\mathscr{C}_3$

85 **a)** $f(x) = 5 - 2(x + 1)^2 = -2x^2 - 4x + 3$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
u	↗	$\frac{1}{4}$	↘

b) $g(x) = 2(1-3x)(1-x) = 6x^2 - 8x + 2$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
g	↘	$-\frac{2}{3}$	↗

d) $u(t) = \frac{1}{4} - t^2$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
u	↗	$\frac{1}{4}$	↘

d) $v(t) = \frac{1}{3}(t-1)^2 = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}$.

t	$-\infty$	1	$+\infty$
v	↘	0	↗

86 **1.** $f(a) = (a-a)(a-b) = 0$.
$f(b) = (b-a)(b-b) = 0$.

2. a) D'après le tableau de variation, $a = -1$ et $b = 3$.
Ainsi $f(x) = (x+1)(x-3)$, d'où $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

b) Tableau

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
f	↘	0	-4	0	↗

87 **1.** Le sommet de la parabole est $S(2\,;-2)$.

2. $f(x) = (x-a)^2 + m$.
Pour tout nombre réel x, $(x-a)^2 \geqslant 0$ donc $(x-a)^2 + m \geqslant m$ soit $f(x) \geqslant m$; de plus $f(a) = m$.
Donc f admet un minimum m obtenu lorsque $x = a$.
On en déduit que $m = -2$ et que $a = 2$.
D'où l'expression de $f(x)$:
$$f(x) = (x-2)^2 - 2, \text{ soit } f(x) = x^2 - 4x + 2.$$

88 **1.** Le sommet de la parabole est $S(-1\,;3)$.

2. $f(x) = M - (x-a)^2$.
Pour tout nombre réel x, $-(x-a)^2 \leqslant 0$ donc $M - (x-a)^2 \leqslant M$ soit $f(x) \leqslant M$; de plus $f(a) = M$.
Donc f admet un maximum M obtenu lorsque $x = a$.
On en déduit que $M = 3$ et que $a = -1$.
D'où l'expression de $f(x)$:
$$f(x) = 3 - (x+1)^2 \text{ soit } f(x) = -x^2 - 2x + 2.$$

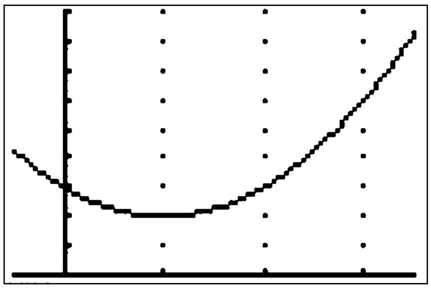
89 *Corrigé dans le manuel.*

90 **1.** $x \xrightarrow[\text{ajouter }-1]{} x-1 \xrightarrow[\text{élever au carré}]{} (x-1)^2 \xrightarrow[\text{ajouter 2}]{} (x-1)^2+2.$

2. Processus d'encadrement lorsque $1 \leqslant x \leqslant 3$:
$1 \leqslant x \leqslant 3 \rightarrow 0 \leqslant x-1 \leqslant 2 \rightarrow 0 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 4$
$\downarrow$
$2 \leqslant f(x) \leqslant 6$

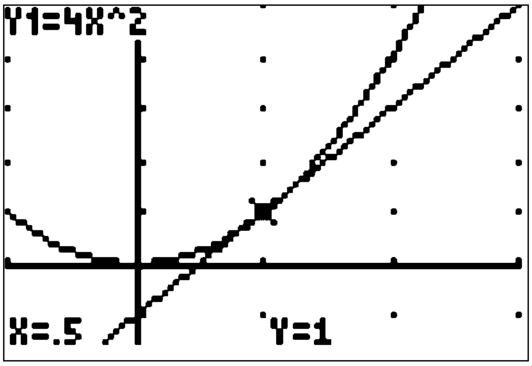
3. Processus d'encadrement lorsque $-2 \leqslant x \leqslant 1$:
$-2 \leqslant x \leqslant 1 \rightarrow -3 \leqslant x-1 \leqslant 0 \rightarrow 0 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 9$
$\downarrow$
$2 \leqslant f(x) \leqslant 11$

4. Vue d'écran :



On conjecture que le résultat de Tom est faux.
Correction du processus :
$0 \leqslant x \leqslant 3 \rightarrow -1 \leqslant x-1 \leqslant 2 \rightarrow 0 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 4$
$\downarrow$
$2 \leqslant (x-1)^2 + 2 \leqslant 6$

91 **1.** Vue d'écran :



On conjecture l'existence d'un unique point d'intersection entre $\mathcal{P} : y = 4x^2$ et $d : y = 4x - 1$.

2. On résout l'équation $4x^2 = 4x - 1$.
Elle équivaut à $4x^2 - 4x + 1 = 0$ soit $(2x-1)^2 = 0$.
Donc $x = \frac{1}{2}$.
Ainsi la parabole et la droite ont un seul point commun $I\left(\frac{1}{2}\,; 1\right)$. La droite d est tangente à la parabole $\mathcal{P}$.

92 **1. a)** L'équation $f(x) = 0$ équivaut à $x^2 = 3$.
Ainsi $S = \{-\sqrt{3}\,; \sqrt{3}\}$.

b) Tableau du signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. a) d passe par les points $A(-1\,;2)$ et $B(2\,;-1)$.
d a une équation du type : $y = ax + b$ avec
$a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$ et $b = y_A - ax_A = 1$.
Ainsi d représente la fonction affine $g : x \mapsto -x + 1$.

b) Résolution graphique de $f(x) > g(x)$:
$S =]-1\,;2[$.

3. a) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow 3 - x^2 > -x + 1 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 > 0$.

b) Par développement :
$(x+1)(2-x) = 2x - x^2 + 2 - x = -x^2 + x + 2$.

c) On étudie le signe du produit $(x + 1)(2 - x)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2 - x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(x + 1)(2 - x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'inéquation $f(x) > g(x)$ équivaut à $(x + 1)(2 - x) > 0$ d'où l'ensemble des solutions $S =]-1\,;2[$.

93 **1.** Il suffit de trouver un contre-exemple.
Le nombre $x = -4$ est tel que $(-4)^2 \geqslant 4$ avec $-4 < 2$.
Ainsi la réciproque est fausse.

2. a) Si $x^2 = 9$, alors $x = 3$: faux.
Contre-exemple : $x = -3$.

b) Si $x^2 = 0$, alors $x = 0$: vrai.

c) Si $x^2 \geqslant 3$, alors $x \geqslant \sqrt{3}$: faux.
Contre-exemple : $x = -2$.

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2	$\searrow$	4	3	0	3	$\nearrow$

3. a) $x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$: faux.
Contre-exemple : $x = 2$.

b) $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2$: vrai.

c) $x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$: vrai.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2	$\searrow$	1	0	1	$\nearrow$

MISE EN ÉQUATION OU INÉQUATION

94 **1.** Aire des deux allées :
$A = 12x + x(8 - x) = -x^2 + 20x$.
Note : on peut aussi calculer A comme la somme des aires des deux allées diminuée de l'aire du carré situé à leur intersection. Ainsi, $A = 12x + 8x - x^2 = -x^2 + 20x$.

2. a) Superficie du terrain : $8 \times 12 = 96$ m^2.
$A = \frac{1}{6}$ superficie d'où la mise en équation :
$-x^2 + 20x = 16$, soit $x^2 - 20x + 16 = 0$.
Condition : $0 \leqslant x \leqslant 8$.

b) $(x - 10)^2 - 84 = x^2 - 20x + 100 - 84 = x^2 - 20x + 16$.

c) Résolution : $(x - 10)^2 - 84 = 0$, soit $(x - 10)^2 = 84$.
Ainsi : $x - 10 = -\sqrt{84}$ ou $x - 10 = \sqrt{84}$
$x = 10 - 2\sqrt{21}$ ou $x = 10 + 2\sqrt{21}$.
Seule la première valeur vérifie la condition $0 \leqslant x \leqslant 8$.
La largeur des allées est $10 - 2\sqrt{21} \approx 0{,}83$ m.

95 **1.** Courbe rouge : fonction D ; courbe verte : fonction F.
En effet, la demande D est représentée par une partie de parabole « tournée vers le haut » vu que le coefficient du terme en p^2 est positif , alors que pour l'offre F, la parabole est tournée vers le bas.

Autre solution : il suffit d'examiner l'offre et la demande pour des valeurs de p particulières (2 ou 5 €).
$D(2) = 5{,}5$ et $F(2) = 1{,}1$ d'où le choix des courbes.

2. a) $D(4) = 1{,}5$. Pour un prix de 4 €, la demande est de 1 500 t.

b) $F(4) = 4{,}3$. Pour un prix de 4 €, l'offre est de 4 300 t.

c) Pour un prix de 4 €, le marché est déséquilibré ; la demande est largement inférieure à l'offre.

3. Graphiquement, on conjecture que le prix d'équilibre est $p_e = 3$ €.
Vérification : $D(3) = 3$ et $F(3) = 3$ donc $D(3) = F(3)$.
Le prix d'équilibre $p_e = 3$ assure une offre et une demande de 3 000 t de fraises.

96 *Corrigé dans le manuel.*

97 **1. a)** Expressions des aires de AHE, HMDE et MBCD :
$\text{aire(AHE)} = \frac{1}{2} \times AH^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{8}$;
$\text{aire(HMDE)} = \frac{1}{2}(HE + MD) \times HM = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + 8 - x\right)\frac{x}{2}$;
$\text{aire(HMDE)} = \frac{1}{2}\left(\frac{16 - x}{2}\right)\frac{x}{2} = \frac{-x^2 + 16x}{8} = -\frac{x^2}{8} + 2x$;
$\text{aire(MBCD)} = BM^2 = (8 - x)^2 = x^2 - 16x + 64$.

b) L'aire de ABCDE est la somme de ces aires :
$\text{aire(ABCDE)} = \frac{x^2}{8} - \frac{x^2}{8} + 2x + x^2 - 16x + 64$
$\text{aire(ABCDE)} = x^2 - 14x + 64$.

2. a) Intervalle de définition : $I = [0\,; 8]$.

b) La fonction aire f est du type $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$; $b = -14$; $c = 64$. Comme $a > 0$, elle est représentée par une partie de parabole « tournée vers le haut ».
Son minimum est obtenu pour $x = -\frac{b}{2a}$ soit $x = 7$.
Tableau de variation

x	0		7		8
f	64	$\searrow$	15	$\nearrow$	16

Ainsi, l'aire du polygone ABCDE est minimale lorsque $x = 7$ (cm) et cette aire minimale vaut 15 (cm^2).

98 **1.** Diamètre, en mm, de la section du fil 2 :
$$CB = AB - AC = 20 - 2x.$$
D'où le rayon du fil 2, $CJ = \frac{CB}{2}$ soit $CJ = 10 - x$.

2. a) Aire de la section de la gaine :
$A_G = \pi R^2$ avec $R = \frac{AB}{2} = 10$ donc $A_G = 100\pi$.

b) Somme des aires des sections des deux fils de rayons respectifs x et $10 - x$: $A_F = \pi x^2 + \pi(10 - x)^2$.

3. Le rayon x est tel que $A_F = \frac{70}{100}A_G$ soit :
$\pi x^2 + \pi(10 - x^2) = \frac{70}{100} \times 100\pi$.
D'où $x^2 + (10 - x)^2 = 70$.
Ainsi le rayon x est solution de l'équation :
$$x^2 + (10 - x)^2 - 70 = 0.$$

4. Pour la résolution de l'équation, la forme canonique est la mieux adaptée.
$2(x-5)^2 - 20 = 0$ équivaut à $(x-5)^2 = 10$.
Donc $x - 5 = -\sqrt{10}$ ou $x - 5 = \sqrt{10}$
$x = 5 - \sqrt{10}$ ou $x = 5 + \sqrt{10}$.
Or x est le rayon du fil le plus gros donc $x \geqslant 5$ et la valeur qui convient est $5 + \sqrt{10}$.
Ainsi les rayons, en cm, des fils sont respectivement :
- gros fil : $x = 5 + \sqrt{10} \approx 8{,}16$;
- petit fil : $10 - x = 5 - \sqrt{10} \approx 1{,}84$.

99 **1. a)** $x^2 + 10x = 96$ équivaut à $x^2 + 10x + 5^2 = 96 + 5^2$ soit $(x+5)^2 = 121$.

b) Le processus algorithmique donne en sortie 6.

- $10 \div 2 = 5$
- $5^2 = 25$
- $96 + 25 = 121$
- $\sqrt{121} = 11$
- $11 - 5 = 6$

L'équation $(x+5)^2 = 121$ équivaut à :
$x + 5 = -\sqrt{121}$ ou $x + 5 = \sqrt{121}$
$x = -11 - 5$ ou $x = 11 - 5$
$x = -16$ ou $x = 6$
Ainsi la méthode d'Al-Khuwārizmī donne bien la solution positive de l'équation proposée.

2. La méthode d'Al-Khuwārizmī, pour la résolution de l'équation $x^2 + 8x = 2\,009$ donne $x = 41$.

- $8 \div 2 = 4$
- $4^2 = 16$
- $2\,009 + 16 = 2025$
- $\sqrt{2\,025} = 45$
- $45 - 4 = 41$

3. Équation du type $x^2 + bx = c$ (b et c positifs)

Variables
    b, c, s
Algorithme
    Saisir b
    Saisir c
    s reçoit $\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$
    Afficher s

OPTIMISATION

100 **1.** Prix de vente : $P(x) = 2{,}3x$.

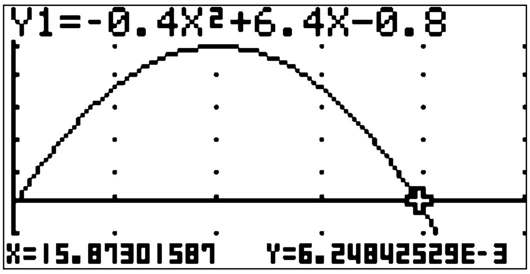
2. a) Bénéfice : $B(x) = P(x) - C(x)$
$B(x) = 2{,}3x - [0{,}4x^2 - 4{,}1x + 0{,}8]$
$B(x) = -0{,}4x^2 + 6{,}4x - 0{,}8$.

b) Le bénéfice est une fonction du type $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = -0{,}4$; $b = 6{,}4$; $c = -0{,}8$.
Comme $a < 0$, elle est représentée par une partie de parabole « tournée vers le bas ». Son maximum est obtenu pour $x = -\frac{b}{2a}$ soit $x = 8$.

x	0	8	$+\infty$
B	↗	24,8	↘

Le bénéfice maximal espéré est de 24 800 € obtenu pour une production de 8 tonnes de poutres.

c) Vue d'écran :



Graphiquement, le solutions de l'équation $B(x) = 0$ sont $x_1 \approx 0{,}13$ et $x_2 \approx 15{,}87$.
Note : les solutions de l'équation $B(x) = 0$ sont symétriques par rapport à $x = 8$ d'où $x_1 + x_2 = 16$.
Ainsi, pour obtenir un bénéfice positif, l'entreprise doit produire entre 0,13 et 15,87 tonnes de poutres.

101 **1. a)** Le propriétaire a consenti une réduction de 2 €, c'est-à-dire qu'il a cumulé 20 réductions de 0,1 €.
Nombre de spectateurs : $300 + 20 \times 10 = 500$.

b) Montant de la recette : $500 \times 5 = 2\,500$ €.

2. Pour remplir la salle, il doit vendre 700 places supplémentaires, c'est-à-dire cumuler 70 réductions de 0,1 €. Le prix du billet sera alors $p = 7 - 70 \times 0{,}1 = 0$.
S'il veut remplir sa salle, la séance doit être gratuite…

3. a) Prix du billet : $p(x) = 7 - 0{,}1x$.

b) Le nombre de spectateurs s'exprime alors par : $n(x) = 300 + 10x$.
D'où le montant de la recette : $r(x) = n(x) \times p(x)$
$r(x) = (300 + 10x)(7 - 0{,}1x)$
$r(x) = -x^2 + 40x + 2\,100$.

c) La fonction r est du type $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$; $b = 40$; $c = 2\,100$. Comme $a < 0$, elle est représentée par une partie de parabole « tournée vers le bas ». Son maximum est obtenu pour $x = -\frac{b}{2a}$ soit $x = 20$.

x	0	20	70
r	2 100 ↗	2 500	↘ 0

d) La recette maximale est de 2 500 € obtenu pour 20 réductions de 0,1 €.
Le prix du billet est $p(20) = 7 - 20 \times 0{,}1 = 5$ €. Le nombre de spectateurs est $n(20) = 300 + 10 \times 20 = 500$. La salle est à moitié pleine !
Note : on retrouve la situation de la question 1.

AVEC LES TICE

102 **1. a)** Création de la page de calcul.

b) Conjecture : la différence semble significative à partir d'un taux de 0,1 c'est-à-dire 10 %.

2. a) C – C' $\geqslant$ 0,01 s'écrit $(1 + t)^2 - (1 + 2t) \geqslant 0{,}01$ soit $t^2 \geqslant 0{,}01$.

b) Le taux t est un nombre positif donc $t \geqslant \sqrt{0{,}01}$ soit $t \geqslant 0{,}1$.
Ainsi, la différence entre les coefficients multiplicateurs $(1 + t)^2$ et $1 + 2t$ est significative dès que $t \geqslant 0{,}1$.

103 **1. d)** Conjecture : le point P semble décrire un arc de parabole.

2. a) Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires. Ainsi, dans les triangles rectangles AOM et AMN, $\widehat{\mathrm{OMA}} = 90° - \widehat{\mathrm{MAO}}$ et $\widehat{\mathrm{ONM}} = 90° - \widehat{\mathrm{MAO}}$ donc $\widehat{\mathrm{OMA}} = \widehat{\mathrm{ONM}}$.

b) Dans les triangles rectangles AOM et MON :
$\tan \widehat{\mathrm{OMA}} = \dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{m}$ et $\tan \widehat{\mathrm{ONM}} = \dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON}} = \dfrac{m}{\mathrm{ON}}$.
Or $\tan \widehat{\mathrm{OMA}} = \tan \widehat{\mathrm{ONM}}$ donc $\dfrac{1}{m} = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{ON}}$ d'où $\mathrm{ON} = m^2$.

c) Les coordonnées de P sont :

$$x_{\mathrm{P}} = x_{\mathrm{M}} = m \quad \text{et} \quad y_{\mathrm{P}} = y_{\mathrm{N}} = m^2.$$

Ainsi, $y_{\mathrm{P}} = x_{\mathrm{P}}^2$ donc le point $\mathrm{P}(m\,;\, m^2)$ est sur la parabole d'équation $y = x^2$.

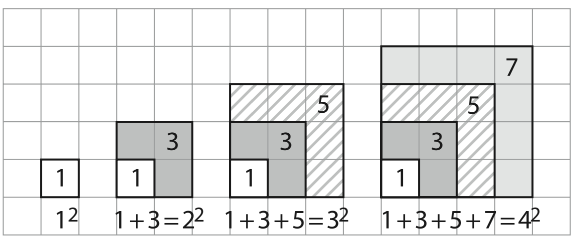
PRENDRE TOUTES LES INITIATIVES

104 On note x le côté (exprimé en m) d'un des carrés constituant la croix.
Mise en équation : aire(croix) $= \dfrac{1}{4}$ aire(fanion)

$$5x^2 = \frac{1}{4} \times 1{,}25 \times 1$$
$$\text{d'où } x^2 = 0{,}0625.$$

Or x est un nombre positif donc $x = \sqrt{0{,}0625} = 0{,}25$.
Ainsi le côté du carré mesure 0,25 m, soit 25 cm.

105 Un processus algorithmique permet de trouver la somme des k premiers nombres impairs.

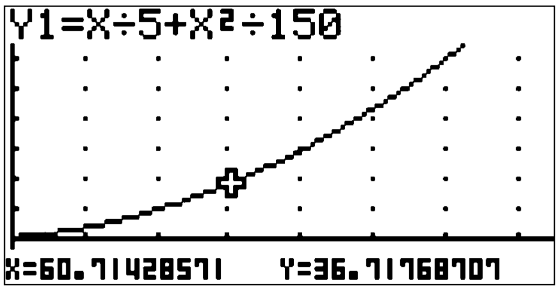


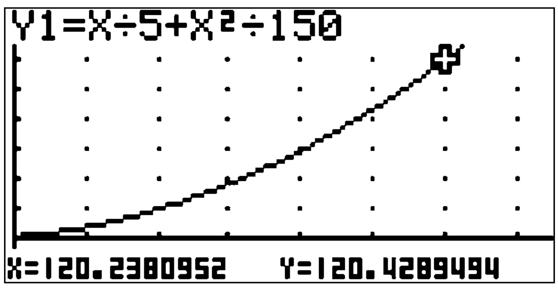
Étape numéro k	1	2	3	4
Dernier entier impair : $2k - 1$	1	3	5	7
Somme : $1 + 3 + … + (2k - 1)$	1^2	2^2	3^2	4^2

Pour la somme S = 1 + 3 + 5 + … + 2 009 le processus nécessite k étapes où le nombre k est défini par $2\,009 = 2k - 1$.
Ainsi $k = 1\,005$.
Or la somme vérifie $\mathrm{S} = k^2$ donc :
$1 + 3 + 5 + 7 + … + 2\,009 = 1\,005^2 = 1\,010\,025$.

106 On trace la parabole d'équation $y = \dfrac{x}{5} + \dfrac{x^2}{150}$.
Ici, les distances d'arrêt (en m) sont notées y et les vitesses (en km.h^{-1}) x.
Fenêtre possible : $0 \leqslant x \leqslant 150$; pas : 20 ;
$-30 \leqslant y \leqslant 150$; pas : 20.
Note : la plage de y doit permettre de visualiser l'affichage lorsqu'on passe en mode TRACE.
À l'aide du mode TRACE, on peut estimer les distances d'arrêt.
Distance d'arrêt en moins de :
- 36 m pour des vitesses de moins de 60 km.h^{-1} ;
- 120 m pour des vitesses de moins de 120 km.h^{-1}.

On peut vérifier par le calcul les valeurs des vitesses limites conjecturées.
$d(60) = \dfrac{60}{5} + \dfrac{60^2}{150} = 36$
et $d(120) = \dfrac{120}{5} + \dfrac{120^2}{150} = 120$.





Approfondissement (page 88)

107 **1. a)** Les triangles CGH et CAB sont dans la configuration de Thalès avec (GH) parallèle à (AB), d'où :
$\frac{GH}{AB} = \frac{CG}{CA}$ soit $\frac{GH}{6} = \frac{x}{12}$ donc $GH = \frac{x}{2}$.

b) aire(DGHI) = GD × GH donc aire(DGHI) $= \frac{x^2}{2}$.

2. a) Les triangles CDE et CAB sont dans la configuration de Thalès avec (DE) parallèle à (AB), d'où :
$\frac{ED}{BA} = \frac{CD}{CA}$ soit $\frac{ED}{6} = \frac{2x}{12}$ donc $ED = x$.

b) aire(ADEF) = DE × DA $= x(12 - 2x) = -2x^2 + 12x$.

3. a) Mise en équation : aire(DGHI) = aire(ADEF)

$$\frac{x^2}{2} = -2x^2 + 12x$$
$$x^2 = -4x^2 + 24x$$
$$5x^2 - 24x = 0.$$

b) Par factorisation : $x(5x - 24) = 0$.

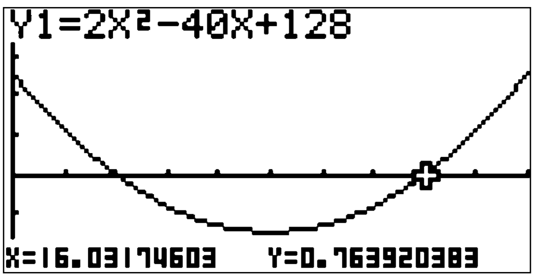
Cette équation équivaut à $x = 0$ ou $x = \frac{24}{5} = 4{,}8$.

Or $0 < x < 6$ donc seule la valeur 4,8 convient.
Ainsi aire(DGHI) = aire(ADEF) uniquement dans le cas où $x = 4{,}8$ cm.

108 **1.** Dans le triangle rectangle MAQ, d'après le théorème de Pythagore $MQ^2 = MA^2 + AQ^2$, soit :
$MQ^2 = x^2 + (20 - x)^2$.
Ainsi aire(MNPQ) $= MQ^2$ soit
aire(MNPQ) $= x^2 + (20 - x)^2$;
d'où $S(x) = 2x^2 - 40x + 400$.
Autre solution :
aire(MNPQ) = aire(ABCD) – 4 × aire(MAQ)
aire(MNPQ) $= 20^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times x(20 - x)$
d'où $S(x) = 2x^2 - 40x + 400$.

2. L'inéquation $S(x) > 272$ s'écrit :
$$2x^2 - 40x + 400 > 272.$$
d'où
$$2x^2 - 40x + 128 > 0.$$

3. a) Vue d'écran :



b) On conjecture que les solutions du problème sont les nombres x tels que $0 \leqslant x < 4$ ou $16 < x \leqslant 20$.

3. a) Par développement de l'expression factorisée, on obtient $(8 - 2x)(16 - x) = 128 - 8x - 32x + 2x^2$
soit $(8 - 2x)(16 - x) = 2x^2 - 40x + 128$.

b) Tableau de signe

x	0		4		16		20
$8 - 2x$		+	0	–	|	–	
$16 - x$		+	|	+	0	–	
$(8 - 2x)(16 - x)$		+	0	–	0	+	

Le problème revient à déterminer les valeurs de x telles que le produit est strictement positif.
Ensemble des solutions : $S = [0 ; 4[\cup]16 ; 20]$.

109 **1. a)** Forme canonique :
$2(x - 1)^2 - 8 = 2(x^2 - 2x + 1) - 8 = 2x^2 - 4x - 6 = f(x)$.

b) Forme factorisée :
$2(x - 3)(x + 1) = (2x - 6)(x + 1) = 2x^2 - 4x - 6 = f(x)$.

2. a) B est le point d'intersection de la parabole et de l'axe des ordonnées donc $x_B = 0$ et $y_B = f(0)$.
À partir de la forme développée : $f(0) = -6$.
Ainsi $B(0 ; -6)$.

b) C et D sont les points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses donc $y_C = y_D = 0$ et les abscisses de C et D sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
On choisit la forme factorisée :
$2(x - 3)(x + 1) = 0$ équivaut à $x = 3$ ou $x = -1$.
Ainsi $C(-1 ; 0)$ et $D(3 ; 0)$.

c) On utilise la forme canonique.
• Pour tout x, $2(x - 1)^2 \geqslant 0$ donc $2(x - 1)^2 - 8 \geqslant -8$ soit $f(x) \geqslant -8$.
• L'équation $f(x) = -8$ s'écrit $2(x - 1)^2 - 8 = -8$.
Elle équivaut à $2(x - 1)^2 = 0$ donc $x = 1$.
Ainsi f admet un minimum égal à -8 obtenu en $x = 1$. D'où le sommet de la parabole : $A(1 ; -8)$.

3. Les abscisses de I et J sont les solutions de l'équation $f(x) = 2$.
$2(x - 1)^2 - 8 = 2$ équivaut à $(x - 1)^2 = 5$ donc $x = 1 - \sqrt{5}$ ou $x = 1 + \sqrt{5}$.
Ainsi $I(1 - \sqrt{5} ; 2)$ et $J(1 + \sqrt{5} ; 2)$.

110 **1.** Dans le triangle rectangle BHM, $\widehat{HBM} = \frac{90°}{2} = 45°$ donc BHM est un triangle rectangle isocèle en H.
Ainsi $HM = BH = x$.

2. a) aire(ABHM) $= \frac{1}{2}(BA + HM) \times BH$ donc
$f(x) = \frac{1}{2}(4 + x)x$ soit $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{2}$.

b) Dans le triangle CDM, on considère la base $b = CD = 4$ et la hauteur associée $h = HC = 4 - x$.
Ainsi aire(CDM) $= \frac{1}{2} b \times h$ d'où $g(x) = \frac{1}{2} \times 4(4 - x)$ soit $g(x) = 8 - 2x$.

3. L'abscisse x_0 du point d'intersection des courbes représentatives de f et g est la valeur de x telle que :
aire(CDM) = aire(ABHM).

4. L'équation $f(x) = g(x)$ s'écrit $\dfrac{x^2 + 4x}{2} = 8 - 2x$.

Elle équivaut à $x^2 + 4x = 16 - 4x$

$x^2 + 8x = 16$

$x^2 + 8x + 16 = 32$

soit $(x + 4)^2 = 32$.

On en déduit que : $x + 4 = -\sqrt{32}$ ou $x + 4 = \sqrt{32}$

$x = -4 - 4\sqrt{2}$ ou $x = -4 + 4\sqrt{2}$.

Or les conditions du problème imposent que $0 \leqslant x \leqslant 4$ donc la valeur $-4 - 4\sqrt{2}$ ne convient pas.

La solution du problème est $x_0 = -4 + 4\sqrt{2}$ ($x_0 \approx 1{,}66$).

111 **1.** Équivalences

• a et b sont deux nombres réels quelconques.

« $a < b$ » n'implique pas « $a^2 < b^2$ ».

Contre-exemple : $a = -2$, $b = 1$.

$-2 < 1$ et $(-2)^2 \geqslant 1^2$.

Conclusion : 1 et 2 ne sont pas équivalentes.

• a et b sont deux nombres négatifs.

« $a < b$ » $\Rightarrow$ « $a^2 > b^2$ »

Cette implication traduit que la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,; 0]$.

Réciproquement : « $a^2 > b^2$ » $\Rightarrow$ « $a < b$ »

x	$-\infty$	a	b	0
x^2	$\searrow$	a^2 $\searrow$	b^2 $\searrow$	0

Note : preuve algébrique

$a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow (a - b)(a + b) > 0$

Or par hypothèse $a < b \leqslant 0$ donc $a + b < 0$.

De la règle des signes on déduit que $a - b < 0$ soit $a < b$.

D'où l'implication : « $a^2 > b^2$ » $\Rightarrow$ « $a < b$ ».

Conclusion : 1 et 2 sont équivalentes.

• a et b sont deux nombres réels.

« $a^2 = b^2$ » $\Rightarrow$ « $a = b$ ou $a = -b$ ».

Preuve : $a^2 = b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)(a + b) = 0$

$\Rightarrow a - b = 0$ ou $a + b = 0$

$\Rightarrow a = b$ ou $a = -b$.

Réciproquement : « $a = b$ ou $a = -b$ » $\Rightarrow$ « $a^2 = b^2$ »

Preuve : si $a = b$ alors $a^2 = b^2$;

si $a = -b$ alors $a^2 = (-b)^2 = b^2$

Ainsi « $a = b$ ou $a = -b$ » $\Rightarrow$ « $a^2 = b^2$ » .

Conclusion : 1 et 2 sont équivalentes.

2. Examinons les deux implications en utilisant le tableau de variation de la fonction carré sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
x^2	$\searrow$	4	1	0	1	$\nearrow$

• « $x^2 < 1$ » implique « $x < 1$ ».

• « $x < 1$ » n'implique pas « $x^2 < 1$ » .

Contre-exemple : $x = -2$ est tel que $-2 < 1$ et $(-2)^2 \geqslant 1^2$.

L'équivalence écrite est donc fausse !

112 **1.** aire(AMN) $= \dfrac{1}{2}$AM^2 soit $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$.

aire(BMP) $= \dfrac{1}{2}$MB^2 soit $g(x) = \dfrac{1}{2}(4 - x)^2$.

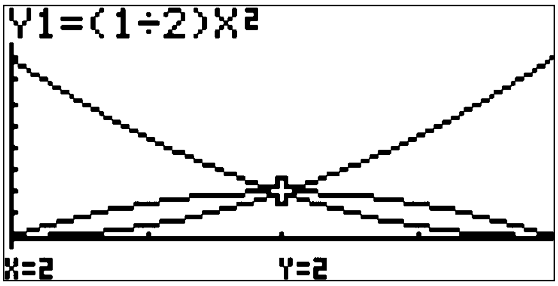
Dans le triangle CNP, soit [PH] la hauteur issue de P.

On choisit pour base CN $= 4 - x$ et pour hauteur associée PH $=$ MA $= x$.

aire(CNP) $= \dfrac{1}{2}$CN $\times$ PH soit $h(x) = \dfrac{1}{2}x(4 - x)$.

2. Les fonctions f, g et h sont définies sur I $= [0\,; 4]$.

Vue d'écran :



3. a) Graphiquement, on conjecture que les trois aires sont égales pour $x = 2$.

Vérification : lorsque $x = 2$ cm,

aire(AMN) = aire(BMP) = aire(CNP) = 2 cm^2.

b) Rangement des aires :

x	0	2	4
Ordre	$f(x) \leqslant h(x) < g(x)$	$\boxed{f(x) = g(x) = h(x)}$	$g(x) \leqslant h(x) < f(x)$

PRENDRE TOUTES LES INITIATIVES

113 La situation est résumée par le tableau :

Capital de départ	C
Au bout de 1 an	$(1 + t\,\%)$C
Au bout de 2 ans	$(1 - t\,\%)(1 + t\,\%)$C
Au bout de 3 ans	$(1 - t\,\%)(1 + t\,\%)^2$C
Au bout de 4 ans	$(1 - t\,\%)^2(1 + t\,\%)^2$C

Ainsi le capital simulé au bout de 4 ans est :

C' $= (1 - t\,\%)^2(1 + t\,\%)^2$C avec $0 < t < 100$.

Mise en équation :

$\left(1 - \dfrac{t}{100}\right)^2\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^2 \times 1\,000\,000 = 999\,200{,}16$

$(100 - t)^2(100 + t)^2 = 99\,920\,016$

$[10\,000 - t^2]^2 = 99\,920\,016$

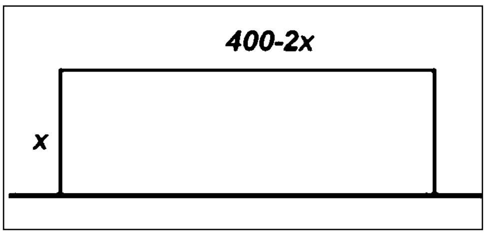
d'où $10\,000 - t^2 = \sqrt{99\,920\,016} = 9\,996$.

On en déduit que $t^2 = 4$ donc $t = 2$.

La simulation a été réalisée à partir d'un taux de 2 %.

114 On note x la longueur (en m) des côtés perpendiculaires à la jetée : $0 \leqslant x \leqslant 200$.

Ainsi l'autre dimension du parc rectangulaire est $400 - 2x$.



Aire du parc : $S(x) = x(400 - 2x)$

$$S(x) = -2x^2 + 400x$$

L'expression de l'aire est du type $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 400$ et $c = 0$.

Comme $a < 0$, la fonction S est représentée par une partie de parabole « tournée vers le bas ». Son maximum est obtenu pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ soit $x = 100$.

Tableau de variation :

x	0	100	200
S	0	↗ 20 000 ↘	0

L'aire du parc est maximale lorsque $x = 100$ m ; la superficie du parc est alors de 20 000 m².

115 Conjecture : la courbe passant par les points O, A, B, C, D est un arc de parabole.

Dans le repère (O ; I, J) :

O(0 ; 0), I(1 ; 0), D(1 ; 1), M_1(1 ; 1/4), M_2(1 ; 1/2), M_3(1 ;3/4).

Les droites (OM_1), (OM_2), (OM_3) ont pour équations respectives $y = \dfrac{1}{4}x$; $y = \dfrac{1}{2}x$; $y = \dfrac{3}{4}x$.

Or $x_A = \dfrac{1}{4}$, $x_B = \dfrac{1}{2}$ et $x_C = \dfrac{3}{4}$ donc les ordonnées des points A, B, C sont $y_A = \dfrac{1}{4}x_A = \dfrac{1}{16}$; $y_B = \dfrac{1}{2}x_B = \dfrac{1}{4}$ et $y_C = \dfrac{3}{4}x_B = \dfrac{9}{16}$.

Ainsi $A\left(\dfrac{1}{4} ; \dfrac{1}{16}\right)$, $B\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{4}\right)$ et $C\left(\dfrac{3}{4} ; \dfrac{9}{16}\right)$.

Finalement, les points O, A, B, C, D ont leurs coordonnées qui vérifient $y = x^2$ donc ils sont situés sur la parabole d'équation $y = x^2$.